

Nome, Cognome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
28 giugno 2024

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} + 3u_{xt} - 10u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \cos x + e^{2x} \\ u_t(x, 0) = \sin x - 2e^{2x}. \end{cases}$$

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 5y''(x) + (x+1)^2y'(x) - x^2y(x) = 2, & 1 \leq x \leq 5 \\ y(1) = 2 \\ y(5) = 3 \end{cases}$$

Si stabilisca

- (a) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;
 - (b) il sistema lineare a cui si perviene esplicitandolo in forma matriciale nel caso $n = 4$ (si espliciti matrice, vettore delle incognite e termine noto);
 - (c) le condizioni da imporre al passo di discretizzazione h affinché il sistema risulti essere invertibile e possa essere risolto mediante un metodo iterativo stazionario del primo ordine spiegandone il motivo;
 - (d) l'ordine dell'errore nel caso in cui $n = 10^3$.
3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx}, & -5 \leq x \leq 5, t \geq 0 \\ u(-5, t) = 0 \\ u(5, t) = 50 \\ u(x, 0) = x(5+x) \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

Si stabilisca

- (a) la classificazione della PDE e del problema dato;

- (b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando l'approssimazione della soluzione agli istanti t_j con $j = 0, 1, 2$. Nel caso l'approssimazione sia soluzione di un sistema, rappresentare la matrice dei coefficienti per $n = 4$.
- (c) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinché il sistema risulti essere invertibile;
- (d) la stima teorica dell'errore, motivando opportunamente la risposta.