Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
8 novembre 2024

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_4 = -8 \\ 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [2, 1, -1, -2]^T, \quad \det(A) = -256.$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile, per quali è definita positiva e per quali valori il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $a = 3$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 0, \pm\sqrt{5}$, definita positiva per $a > \sqrt{5}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $a < -\sqrt{5}$ o $a > \sqrt{5}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 5/3, 4/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [4/9, 1/3, 2/3]^T$.

3. Considerato il seguente metodo alle differenze finite, dipendente dai parametri reali α e β,

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{2}{5}h\left[\alpha f(x_i, \eta_i) + 2f(x_i + \frac{\alpha\beta}{3}h, \eta_i + \frac{\alpha\beta}{3}hf(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

dire per quale valore dei parametri risulta convergente e per quali valori risulta del second'ordine.

Soluzione. Il metodo è convergente per $\alpha = 1/2$ e qualsiasi β, è del second'ordine per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 15/4$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$y'' + 2y = \sin(3x)$$

e dire se il termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie di $\sin(3x)$ in $[-1, 1]$ risulta essere

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi \sin(3)(-1)^k}{9 - k^2\pi^2} \sin(k\pi x)$$

e non è differenziabile termine a termine. La soluzione dell'equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi \sin(3)(-1)^k}{(9 - k^2\pi^2)(2 - k^2\pi^2)} \sin(k\pi x).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{3x\mathrm{e}^{-2x}H(x-3)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(3k-3)}{(3k-3)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}\right\}.$$

Soluzione.

$$\mathcal{F}\left\{3x\mathrm{e}^{-2x}H(x-3)\right\} = 3\mathrm{e}^{-3(2+\mathrm{i}k)}\frac{7+3\mathrm{i}k}{(2+\mathrm{i}k)^2},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(3k-3)}{(3k-3)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}\right\} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-3)}\left[H(x) - H(x-6)\right].$$