Nome, Cognome e Matricola:...

Corso di Studi:...

Prima prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
15 novembre 2024

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -2 - x, & x \in [-\frac{7}{2}, -2), \\ -2, & x \in [-2, 2), \\ x - 2, & x \in [2, \frac{7}{2}]. \end{cases}$$

   Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di f nei punti $x = -7/2, -1/2, 1, 2$. Dire, infine, se questa è differenziabile termine a termine.

   Soluzione: Dal teorema della convergenza segue che $S_f(-7/2) = 3/2$, $S_f(-1/2) = -2$, $S_f(1) = -2$, *e* $S_f(2) = -1$. *la serie della* f *non è differenziabile termine a termine in quanto la* f *non è continua nei punti* ± 2. *Inoltre risulta che*

$$S_y(x) = \frac{23}{28} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{49 a_k}{49 + 4k^2\pi^2} \cos\left(\frac{2k\pi}{7} x\right),$$

   dove

$$a_k = -\frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{4k\pi}{7}\right) - \frac{7}{(k\pi)^2}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{7}\right) - (-1)^k\right).$$

2. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} + 6u_{xt} + 7u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 2x + 1, \\ u_t(x,0) = 2x^2. \end{cases}$$

   Soluzione: La soluzione cercata è

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{2}(x+\alpha_1 t)^3}{6} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)(x + \alpha_1 t) + 1 - \frac{\sqrt{2}(x+\alpha_2 t)^3}{6} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)(x + \alpha_2 t)$$

   dove $\alpha_1 = -3 + \sqrt{2}$ *e* $\alpha_2 = -3 - \sqrt{2}$.

3. Si classifichi il seguente problema differenziale e si scriva la sua soluzione mediante sviluppo in serie con il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} u_t = -4u_{xx} - 6u_x - 2u, \qquad x \in [0,\, 1], \qquad t \geq 0 \\ u_x(0,t) + u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin x. \end{cases}$$

NOTA: Nella risoluzione del problema di Sturm-Liouville si consideri solo il caso in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate.

Soluzione. Il problema differenziale è di tipo Cauchy-Dirichlet e la PDE è di tipo iperbolica, omogenea e lineare. Scriviamo $u(x,t) = v(x)w(t)$ dove v e w sono soluzioni dei seguenti problemi

$$\begin{cases} w'(t) - \lambda w(t) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4v''(x) + 6v'(x) + (2+\lambda)v(x) = 0 \\ v'(0) + v(0) = 0 \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi essere

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t)$$

dove

$$v_k(x) = e^{-3/4x}\left[\cos(\gamma_k x) - \frac{1}{4\gamma_k}\sin(\gamma_k x)\right], \quad w_k(t) = e^{\lambda_k t}, \quad c_k = \frac{\displaystyle\int_0^1 \sin x \, v_k(x)\, e^{3/2x}\, dx}{\displaystyle\int_0^1 v_k^2(x) e^{3/2x}},$$

con $\lambda_k = \frac{1}{4} + \frac{(4\gamma_k)^2}{4}$ e γ_k soluzioni dell'equazione non lineare $\tan\gamma = 4\gamma$.