Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
17 gennaio 2025

1. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $a = 1$. Si dica senza calcolare il raggio spettrale e motivando opportunamente la risposta se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate di tale metodo, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$.

Soluzione. Il sistema ammette un'unica soluzione se $a \neq \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $a < -\sqrt{\frac{20}{3}}$ e $a > \sqrt{\frac{20}{3}}$. Se $a = 1$ la matrice è diagonalmente dominante in senso stretto e pertanto il metodo di Jacobi è convergente. Le prime due iterate del metodo di tale metodo sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, -7/4, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/8, -7/8, 11/12]^T$.

2. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} (x+y)^2 u_{yy} + u_{xx} - u = 0, & x \in [0,\, 2], \quad y \in [0,\, \pi] \\ u(0,y) = g_1(y) \\ u(2,y) = g_2(y) \\ u(x,0) = f_1(x) \\ u(x,\pi) = f_2(x), \end{cases}$$

dove g_1, g_2, f_1, e f_2 sono funzioni note. Si stabilisca

   (a) la classificazione della PDE e del problema dato;

   (b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite, specificando la struttura del sistema lineare che si ottiene. Si indichi, nel dettaglio quali sono gli elementi non nulli e su quale diagonale si collocano.

Soluzione. (a) Il problema è di tipo Dirichlet e l'equazione è di tipo ellittico in ogni punto del dominio $(x, y) \neq (0, 0)$. (b) Lo schema numerico è quello di discretizzazione a 5 punti. Il sistema lineare presenta una matrice quadrata pentadiagonale a blocchi di dimensione nm, se si indica con n il numero dei nodi interni all'intervallo $[0, 2]$ e con m il numero dei nodi interni a $[0, \pi]$. Gli elementi della diagonale principale sono

$$a_{ij} = -\frac{2}{h^2} + \frac{2(x_i + y_j)^2}{k^2} - 1,$$

quelli della prima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$b_{ij} = \hat{b}_{ij} = \frac{1}{h^2}$$

mentre quelli della n-esima sopra e sotto diagonale sono pari a

$$c_{ij} = \hat{c}_{ij} = \frac{(x_i + y_j)^2}{k^2}.$$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = (1 + x^2)u_{xx} + 2(x + t)\, u_x + g(x)u, & x \in [0,\, 2\pi], \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = f_1(t) \\ u(2\pi, t) = f_2(t) \\ u(x, 0) = 3 \end{cases}$$

dove f_1, f_2, e g sono funzioni note. Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(c) il sistema lineare per approssimare la soluzione all'istante t_1 e t_2 nel caso in cui il numero dei nodi di discretizzazione della variabile x sia $n = 4$.

(d) le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile nel caso in cui $g(x) = -(1 + \cos^2 x)$ oppure $g(x) = \cos^2(x)$;

(e) il numero degli istanti m affinche l'errore sia almeno dell'ordine di 10^{-6} se $h = 10^{-3}$.

Soluzione.(a) La PDE è del secondo ordine di tipo parabolico, lineare e omogenea. Il problema è di tipo Cauchy-Dirichlet. (b) Lo schema numerico che si utilizza è quello a 4 punti. (c) I sistemi lineari hanno dimensione 4×4 e presentano matrice tridiagonale e vettore dei termini noti

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3/k - f_1(t_1)b_{11} \\ -3/k \\ -3/k \\ -3/k - f_2(t_1)c_{41} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -u_{11/k} - f_1(t_2)b_{12} \\ -u_{21/k} \\ -u_{31/k} \\ -u_{41/k} - f_2(t_2)c_{42} \end{bmatrix},$$

nel primo e nel secondo caso, rispettivamente, dove

$$b_{ij} = \frac{(1+x_i)^2}{h^2} - \frac{(x_i+t_j)}{h}, \qquad c_{ij} = \frac{(1+x_i)^2}{h^2} + \frac{(x_i+t_j)}{h}.$$

(d) Se $g(x) = -(1+\cos x^2)$ *i sistemi hanno matrice diagonalmente dominante in senso stretto per ogni valore di* k *e per* $h < \frac{1}{2\pi+T}$*, avendo indicato con* T *il tempo finale. Se* $g(x) = \cos^2 x$ *la matrice è diagonalmente dominante e irriducibile se* $k \leq 1$ *oppure diagonalmente dominante in senso stretto se* $k < 1$*. (e)* $m \geq T10^6 - 1$*, con* T *tempo finale.*