Nome, Cognome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
10 febbraio 2025

1. Risolvere mediante il metodo degli integrali generali il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} + 3u_{xt} - 28u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = x^2 + x + 3 \\ u_t(x,0) = x - 1. \end{cases}$$

Soluzione:

$$u(x,t) = \frac{18}{11}\left(x + \frac{t}{4}\right)^2 - \frac{7}{11}\left(x - \frac{t}{7}\right)^2 x - t + 3.$$

2. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville, determinando il peso rispetto a quale le autofunzioni sono ortogonali e indicando la relazione di ortogonalità:

$$\begin{cases} y''(x) + 12y'(x) + (\lambda + 36)y(x) = 0 \\ 2y(0) - y'(0) = 0 \\ y(4) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Gli autovalori sono $\lambda_k = \dfrac{z_k^2}{16}$ *dove* z_k *sono le soluzioni dell'equazione non lineare* $\tan(z) = -\dfrac{z}{32}$, *le autofunzioni sono*

$$y_k(x) = e^{-6x}\left(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{8}\cos(\sqrt{\lambda_k}x) + \sin(\sqrt{\lambda_k}x)\right),$$

la funzione peso è $r(x) = e^{12x}$, *e la relazione di ortogonalità è*

$$\int_0^4 y_k(x)y_h(x)r(x)dx \begin{cases} = 0, & k \neq h \\ \neq 0, & k = h \end{cases}.$$

3. Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = 2x^2 u_{xx} + 4(\cos x + 2t)\, u_x + g(x,t)u + 2, & x \in \left[\frac{\pi}{2},\, 3\pi\right], \quad t \geq 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \\ u(3\pi, t) = \frac{5}{2}\pi \\ u(x, 0) = x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

dove g è una funzione nota. Si stabilisca

(a) la classificazione della PDE e del problema dato;

(b) lo schema numerico che si ottiene mediante discretizzazione alle differenze finite;

(c) il sistema lineare per approssimare la soluzione all'istante t_1 e t_2 nel caso in cui il numero dei nodi di discretizzazione della variabile x sia $n = 3$.

(d) motivando opportunamente la risposta, le condizioni da imporre ai passi di discretizzazione h e k affinchè il sistema risulti essere invertibile nel caso in cui $g(x,t) = -t\sin^2 x$ oppure $g(x,t) = \sin^2(x) + 2t$;

(e) il numero n dei nodi di discretizzazione x_i affinchè l'errore sia almeno dell'ordine di 10^{-6} se $k = 10^{-6}$.

Soluzione.(a) La PDE è del secondo ordine di tipo parabolico, lineare e omogenea. Il problema è di tipo Cauchy-Dirichlet. (b) Lo schema numerico che si utilizza è quello a 4 punti. (c) I sistemi lineari hanno dimensione 3×3 *e presentano matrice tridiagonale e vettore dei termini noti*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 - (x_1 - \frac{\pi}{2})\frac{1}{k} \\ -2 - (x_1 - \frac{\pi}{2})\frac{1}{k} \\ -2 - (x_1 - \frac{\pi}{2})\frac{1}{k} - \frac{5\pi}{2} c_{31} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 - u_{11/k} \\ -2 - u_{21/k} \\ -2 - u_{31/k} - \frac{5\pi}{2} c_{32} \end{bmatrix},$$

nel primo e nel secondo caso, rispettivamente, dove

$$c_{ij} = \frac{2x_i^2}{h^2} + 2\frac{(\cos x_i + 2t_j)}{h}.$$

(d) Se $g(x,t) = -t\sin^2 x)$ *i sistemi hanno matrice diagonalmente dominante in senso stretto per ogni valore di* k *e per* $h < \frac{\pi^2}{4(1+2T)}$*, avendo indicato con* T *il tempo finale. Se* $g(x) = \sin^2 x + 2t$ *la matrice è diagonalmente dominante e irriducibile se* $k \leq \frac{1}{2T}$ *oppure diagonalmente dominante in senso stretto se* $k < \frac{1}{2T}$*. In entrambi i casi,* h *deve verificare la condizione data in precedenza. (e)* $n \geq 2\frac{10^3}{5\pi} - 1$.