Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

31 gennaio 2025

1. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix},$$
dire per quali valori del parametro reale α la matrice A risulta non singolare, per quali ha autovalori positivi e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 2, 1)^T$, risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}$, non è simmetrica per alcun valore di α, ha autovalori positivi se $\alpha > \sqrt{2}$. Il metodo di Jacobi converge per $\alpha < -\sqrt{2}$ oppure $\alpha > \sqrt{2}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 1, 1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [0, 3/2, 5/4]^T$.

2. Posto $\alpha = 1/2$ nella matrice A dell'esercizio 2, calcolare la sua fattorizzazione $PA = LU$ ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e la prima colonna di A^{-1}.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7/8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = [6/7, 4/7, 8/7]^T, \quad \det(A) = -7/8.$$

3. Assegnato il sistema di equazioni differenziali
$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_1 y_2 \\ y_2' = \frac{1}{4} y_2 - y_1 y_2 \\ y_1(0) = 2, \ y_2(0) = 1, \end{cases}$$
utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 1$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, \frac{1}{8})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{9}{8}, \frac{1}{64})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-3y'' + 5y = x, \qquad x \in [-1/2, 1/2]$$

e dire se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi(5 + 12k^2\pi^2)} \sin(2k\pi x).$$

Il termine noto non è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 5\sqrt{2}y' + 12y = \delta(x - 3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{e}^{2\sqrt{2}(x-3)} - \mathrm{e}^{3\sqrt{2}(x-3)}\right], & x \leq 3, \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$