Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
19 febbraio 2025

1. Si risolva mediante la fattorizzatione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema e la terza colonna dell'inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [2, 1, -1]^T, A^{-1}\mathbf{e}_3 = [1, -2, 1]^T, \quad \det(A) = 1.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \gamma & \gamma \\ \gamma & 4 & 0 \\ 2 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$. Posto $\gamma = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, \pm 2\sqrt{2}$. Il metodo di Jacobi converge per $-2\sqrt{2} < \gamma < 2\sqrt{2}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 1, 2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-1, 3/2, 3]^T$.

3. Assegnato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = x + y_1 y_2 \\ y_2' = 3y_2 - x y_1 \\ y_1(1) = 2, \ y_2(1) = 1, \end{cases}$$

utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{55}{8}, \frac{9}{8})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-3y'' + 5y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 6(1 + \frac{x}{5}), & -5 \leq x < 0, \\ 6(1 - \frac{x}{5}), & 0 \leq x < 5, \end{cases}$$

e dire se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \frac{3}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{25a_k}{125 + 3k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right),$$

dove $a_k = \frac{12}{(k\pi)^2}(1 - (-1)^k)$. La serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{2ix}}{x^2 - 2x + 6}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(2k-4)}{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k}(k-2)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}\pi}{5} e^{-\mathrm{i}(k-2)} e^{-\sqrt{5}|k-2|},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x+2)} [H(x+4) - H(x)].$$