

ESERCIZI

Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

Calcolo Numerico

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

6 CFU - A.A. 2019/2020

DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 9 DICEMBRE 2019

Metodi alle differenze finite per PDE

Esercizio 1 Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite, del seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} + x \cos^2 \pi y u_x + (x^2 + y^2)u_y - (2 - \cos xy)u = xy \cos(\pi xy), & x \in [0, 3], y \in [0, 4] \\ u(0, y) = y; & u(3, y) = y - 3; \\ u(x, 0) = -x; & u(x, 4) = 4 - x. \end{cases}$$

Spiegare dettagliatamente le proprietà del sistema lineare a cui si perviene, esplicitandolo nel caso in cui i nodi di discretizzazione relativi all'intervallo $[0, 3]$ siano $n = 3$ e quelli relativi all'intervallo $[0, 4]$ siano $m = 3$. Infine, si dica nel caso $n = m$ quanti nodi sono necessari per avere un errore dell'ordine di 10^{-3} .

Esercizio 2 Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite, del seguente problema

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 6u_x - 3u + \sin x, & x \in [0, 5], t \geq 0 \\ u(0, t) = 2; & u(5, t) = 3; \\ u(x, 0) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right). \end{cases}$$

Spiegare dettagliatamente le proprietà del sistema lineare a cui si perviene, esplicitandolo nel caso in cui i nodi di discretizzazione relativi all'intervallo $[0, 5]$ siano $n = 4$ e l'istante temporale sia $j = 1$. Si dica, inoltre quale

è l'ordine dell'errore nel caso in cui i passi di discretizzazione spaziale e temporale siano 10^{-2} e 10^{-3} , rispettivamente.

Esercizio 3 Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite, del seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = (1 + x^2 t^2)u_{xx} + \cos(xt)u_t + t^2 u_x + (xt)u, & x \in [-5, 5], t \geq 0 \\ u(-5, t) = 2; & u(5, t) = 0; \\ u(x, 0) = x + 1; & u_t(x, 0) = 3x. \end{cases}$$

Spiegare le proprietà del sistema lineare a cui si perviene e stabilire l'errore teorico.