

ESERCIZI
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
6 CFU - A.A. 2020/2021
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 1 NOVEMBRE 2020

Risoluzione analitica di ODE

Esercizio 1 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1-y}{x} \\ y(1) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y' = -(\cos x)y + \sin x \cos x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: La soluzione del primo problema è

$$y(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Il secondo problema, invece, ammette come unica soluzione la funzione

$$y(x) = \sin x - 1 + e^{-\sin x}.$$

Esercizio 2 Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Il primo problema ammette come soluzione

$$y(x) = e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{(1-\sqrt{2})x},$$

il secondo, invece,

$$y(x) = e^x \cos(2x).$$

Esercizio 3 Calcolare le soluzioni delle seguenti ODE del secondo ordine non omogenee

1. $y'' - 2y' + y = e^x$;
2. $y'' - 2y' + y = x^2 + x$;

3. $y'' + 4y = \sin 2x$.

Suggerimento: scrivere la soluzione particolare come $\hat{y}(x) = x(a \cos(2x) + b \sin(2x))$

Soluzione:

1. $y(x) = \frac{x^2}{2}e^x + e^x(c_1 + c_2x)$;

2. $y(x) = x^2 + 5x + 8 + e^x(c_1 + c_2x)$;

3. $y(x) = -\frac{x}{4} \cos 2x + c_2 \sin(2x) + c_1 \cos(2x)$

dove in tutti i casi c_1 e c_2 sono delle costanti.