Esercizi
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi

Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio
6 CFU - A.A. 2020/2021
docente: Prof.ssa Luisa Fermo
ultimo aggiornamento: 12 novembre 2023

Risoluzione analitica di ODE mediante Serie di Fourier
Esercitazione del 23 ottobre 2020.

Esercizio 1 Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1,1]$

$$-5y'' - y' + 2y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1-x, & -1 \le x < 0, \\ 1+x, & 0 \le x < 1, \\ f(x+2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire se $f(x)$ **è differenziabile termine a termine e stabilire il valore della serie di Fourier di** f **nei punti** $x = -1, 0, 1/2$**.**

Soluzione La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1)) \right] \cos(k\pi x) + \left[\frac{2}{k\pi} \left(1 - (-1)^k\right) \right] \sin(k\pi x)$$

Poichè f non è continua, la sua serie non è differenziabile termine a termine. Dal teorema di convergenza della serie di Fourier risulta che $S_f(1/2) = 3/2$; $S_f(-1) = 1$ e $S_f(0) = 0$.

Infine, la serie dell'incognita è

$$S_y(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(k\pi x) + \tilde{b}_k \sin(k\pi x),$$

dove, posto $a_k = \frac{2}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1))$ e $b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$,

$$\tilde{a}_k = \frac{(2 + 5k^2\pi^2)a_k + k\pi b_k}{[(2 + 5k^2\pi^2)^2 + \pi^2 k^2]}, \qquad \tilde{b}_k = \frac{(2 + 5k^2\pi^2)b_k - k\pi a_k}{[(2 + 5k^2\pi^2)^2 + \pi^2 k^2]}.$$

Esercizio 2 Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$3y'' + 2y = \cos(2x).$$

Stabilire se il termine noto è integrabile termine a termine e, se lo è, applicare il teorema di integrazione termine a termine.

Soluzione. La serie di Fourier del termine noto $f(x) = \cos(2x)$ è

$$S_f(x) = \sin 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 1}{1 - k^2\pi^2} \cos(2k\pi x).$$

Tale serie è integrabile termine a termine e integrando si ottiene

$$\frac{\sin 2t}{2} - t\sin 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 1}{k\pi(1 - k^2\pi^2)} \sin(2k\pi t).$$

Infine, la serie della funzione incognita è

$$S_y(x) = \frac{\sin 1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin 1}{(1 - k^2\pi^2)(1 - 6k^2\pi^2)} \cos(2k\pi x).$$

Esercizio 3 Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$3y'' + \sqrt{\pi}y' + 2y = \cos(2x).$$

Soluzione.

$$S_y(x) = \frac{\sin 1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(2k\pi x) + \tilde{b}_k \sin(2k\pi x),$$

dove, posto $a_k = 2\dfrac{(-1)^k \sin 1}{1 - k^2\pi^2}$,

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k(1 - 6k^2\pi^2)}{2[(1 - 6k^2\pi^2)^2 + \pi^3k^2]}, \qquad \tilde{b}_k = \frac{a_k\sqrt{\pi}k\pi}{2[(1 - 6k^2\pi^2)^2 + \pi^3k^2]}.$$