

ESERCIZI
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
6 CFU - A.A. 2020/2021
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 6 NOVEMBRE 2020

Risoluzione analitica di PDE
Esercitazione del 6 novembre 2020.

Esercizio 1 Risolvere, mediante il metodo degli integrali generali, il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xt} + 39u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = x^2 + 1 \\ u_t(x, 0) = x + 2. \end{cases}$$

Soluzione $u(x, t) = -\frac{1}{4}(x + 13t)^2 + \frac{1}{5}(x + 13t) + 1 + \frac{5}{4}(x + 3t)^2 - \frac{1}{5}(x + 3t)$.

Esercizio 2 Risolvere, mediante il metodo di separazione delle variabili, il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} 3u_{tt} - 2u_{xx} + u_x - u = 0, & 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(2, t) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$

Esercizio 3 [tratto dalla prova d'esame del 30 gennaio 2020]

Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx} + 3u_x - 2u, & 0 \leq x \leq 3, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = 2 \\ u(3, t) = 3 \\ u(x, 0) = x(3 - x) \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione

$$u(x, t) = \Psi(x) + e^{-\frac{3}{10}x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)$$

dove

$$\Psi(x) = \left(\frac{2e^{\frac{6}{5}} - 3}{e^{\frac{6}{5}} - e^{-3}}\right) e^{-x} + \left(\frac{3 - 2e^{-3}}{e^{\frac{6}{5}} - e^{-3}}\right) e^{\frac{2x}{5}}, \quad \lambda_k = \frac{\frac{100}{9}k^2\pi^2 + 49}{20},$$

e i coefficienti della serie sono

$$c_k = \frac{\int_0^3 e^{-\frac{3}{10}x} \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) [x(3-x) - \Psi(x)] e^{\frac{3}{5}x} dx}{\int_0^3 \sin^2\left(\frac{k\pi}{3}x\right) dx}.$$