

ESERCIZI

Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

6 CFU - A.A. 2020/2021

DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 13 DICEMBRE 2020

Metodi alle differenze finite

Esercitazione del 11 dicembre 2020 e 16 dicembre 2020

Esercizio 1 Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite centrali, del seguente problema con valori agli estremi

$$\begin{cases} 2y'' + (x + \sin x)y' + (\cos x - 1)y = x^2, & x \in [-1, 1] \\ y(-1) = 2, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Spiegare dettagliatamente le proprietà del sistema lineare esplicitandolo nel caso in cui i nodi di discretizzazione siano $n = 4$. Stabilire l'errore locale nel caso in cui il passo di discretizzazione $h = 10^{-5}$.

Esercizio 2 Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite, del seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + (2 + \cos xy)u_{yy} + (xy + 1)u_x - xy^2u_y - u = 0, & x, y \in [-5, 5], \\ u(-5, y) = f_1(y); & u(5, y) = f_2(y); \\ u(x, -5) = g_1(x); & u(x, 5) = g_2(x). \end{cases}$$

Spiegare dettagliatamente le proprietà del sistema lineare a cui si perviene, esplicitandolo nel caso in cui i nodi di discretizzazione relativi all'intervallo $[0, 3]$ siano $n = 3$ e quelli relativi all'intervallo $[0, 4]$ siano $m = 3$. Infine, si dica nel caso $n = m$ quanti nodi sono necessari per avere un errore dell'ordine di 10^{-4} .

Esercizio 3 Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite, del seguente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3(1 + x^2)u + \sin^2 \pi x, & x \in [0, 2], t \geq 0 \\ u(0, t) = 0; & u(2, t) = 0; \\ u(x, 0) = \frac{1}{4}x^2. \end{cases}$$

Spiegare dettagliatamente le proprietà del sistema lineare a cui si perviene, esplicitandolo nel caso in cui i nodi di discretizzazione relativi all'intervallo $[0, 2]$ siano $n = 4$ e l'istante temporale sia $j = 1$. Si dica, inoltre quale è l'ordine dell'errore nel caso in cui i passi di discretizzazione spaziale e temporale siano 10^{-2} e 10^{-3} , rispettivamente.