Laboratorio di
Algoritmi Numerici per l'Ingegneria
A.A. 2023/2024
docente: Prof.ssa Luisa Fermo

Metodo di Eulero con applicazioni
Lezioni del 24-26 giugno 2024

Esercizio 1 Scrivere un file script denominato testMalthus che calcoli la soluzione del modello di Malthus

$$\begin{cases} y'(t) = (K - M)y(t), \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mediante il metodo di Eulero. Si preveda la costruzione di un file function denominato malthus che definisca la funzione generatrice

$$f(t, y) = (K - M)y(t).$$

Si testi dapprima l'algoritmo mediante la soluzione esatta

$$y(t) = y_0 e^{(K-M)t}$$

assumendo $T = 1$, $y_0 = 1000$, $M = 0.4$ e $K = 0.8$.

Si costruisca, quindi, un unico grafico che riporti la soluzione approssimata nel caso in cui $M = 0.4$ e $K = 0.2, 0.4, 0.8$.

Esercizio 2 Scrivere un file function denominato Eulero, che implementi il metodo di Eulero per risolvere un problema di Cauchy di m ODE. Scrivere, quindi, un file script denominato testEulero per testare l'algoritmo Eulero sui seguenti problemi:

(a)
$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + \cos(x) - \sin(x), \quad x \in [0,\ 1] \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = e^{-x} + \cos(x)$.

(b)
$$\begin{cases} y''(x) = 3y'(x) - 2y(x), \quad x \in [0,\ 1] \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(x) = e^{x}$.

Si calcoli l'errore assoluto e lo si confronti con quello che si ottiene con la function del Matlab ODE23.

Esercizio 3 Si crei uno script denominato `testpreda` che richiama il file function Eulero e che calcoli la soluzione del modello di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} F'(t) = \alpha F(t) - \beta P(t)F(t), \quad t \in [0,T] \\ P'(t) = \gamma P(t)F(t) - \delta P(t) \\ F(0) = F_0,\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

Fissato $T = 30$, $F_0 = 800$, $P_0 = 30$, $\delta = 1$, $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.001$ e $\gamma = 0.001$, si plotti graficamente

- la soluzione ottenuta con il metodo di Eulero;
- la soluzione ottenuta con la function del Matlab `ode45`.

Si costruisca infine il diagramma delle fasi che relaziona le prede ai predatori.

Esercizio 4 Si consideri il seguente modello SIR

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t), \quad t \in [0,T] \\ I'(t) = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \\ S(0) = S_0,\ I(0) = I_0,\ R(0) = Q_0 \end{cases}$$

dove β è il tasso di contagio e γ è il tasso di guarigione. Si risolva numericamente il problema, plottando le soluzioni, nei seguenti casi:

- $\gamma = 7$; $\beta = 41.58$ ($R_0 = 5.94$);
- $\gamma = 7$; $\beta = 9.94$ ($R_0 = 1.42$);
- $\gamma = 7$; $\beta = 1.96$ ($R_0 = 0.28$).