ESERCITAZIONE 1

17 ottobre 2024

Corso di: *Matematica Applicata*

Docente: prof.ssa Luisa Fermo

Tutor: dott. Marco Boi

Esercizio 1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha che $A \cdot B = C$.

b) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ tali per cui l'entrata nella seconda riga e prima colonna della matrice $B^t A$ sia pari a -1.

c) Per quali valori di α la matrice A è singolare?

Soluzione: a) $\alpha = -1$; *b)* $\alpha = \pm 2i$; *c)* $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}^t$$

a) Calcolare la norma 1, 2 e ∞ dei tre vettori assegnati.

b) Calcolare lo spettro e il raggio spettrale della matrice $A = \mathbf{v_1}\mathbf{v_2}^t + \mathbf{v_1}\mathbf{v_3}^t$.

c) Stabilire se la matrice $B = \mathbf{v_1}\mathbf{v_1}^t + \mathbf{v_3}\mathbf{v_3}^t$ è invertibile e in caso affermativo calcolarne l'inversa.

d) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ applicando il procedimento di Gram-Schmidt modificato al sistema di vettori $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$.

Soluzione:

a) $\|\mathbf{v_1}\|_1 = 3$; $\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{5}$; $\|\mathbf{v_1}\|_\infty = 2$; $\|\mathbf{v_2}\|_1 = 1$; $\|\mathbf{v_2}\|_2 = 1$; $\|\mathbf{v_2}\|_\infty = 1$; $\|\mathbf{v_3}\|_1 = 7$; $\|\mathbf{v_3}\|_2 = \sqrt{17}$; $\|\mathbf{v_3}\|_\infty = 3$;

b) $\sigma(A) = \{0, 6\}$, $\rho(A) = 6$;

c) la matrice B non è invertibile;

d) $\{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}\} = \{(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0), (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}, 0), (0, 0, -1)\}$

Esercizio 3. Siano dati i vettori

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 5 \\ -1 \\ \sqrt{3} + \sqrt{3}i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 2 - \frac{1}{2}i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcolare le norme 1, 2 e ∞ di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

b) Calcolare $\mathbf{v}^t\overline{\mathbf{w}}$, la matrice $\overline{\mathbf{v}}\mathbf{w}^t$ e la sua aggiunta.

Soluzione:
a) $\|\mathbf{v}\|_1 = 6+\sqrt{2}+\sqrt{6}$; $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{34}$; $\|\mathbf{v}\|_\infty = 5$; $\|\mathbf{w}\|_1 = \frac{4+\sqrt{17}}{2}$; $\|\mathbf{w}\|_2 = \frac{5}{2}$; $\|\mathbf{w}\|_\infty = \frac{\sqrt{17}}{2}$;
b) $\mathbf{v}^t\overline{\mathbf{w}} = -(2+\sqrt{3}) + (\frac{9}{2}-\sqrt{3})i$;

$$\overline{\mathbf{v}}\mathbf{w}^t = \begin{bmatrix} 0 & -1-i & \frac{3}{2}-\frac{5}{2}i & -1+i \\ 0 & -5i & 10-\frac{5}{2}i & -5 \\ 0 & i & -2+\frac{1}{2}i & 1 \\ 0 & -\sqrt{3}-\sqrt{3}i & \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i & -\sqrt{3}+\sqrt{3}i \end{bmatrix}; \quad (\overline{\mathbf{v}}\mathbf{w}^t)^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 5i & -i & -\sqrt{3}+\sqrt{3}i \\ \frac{3}{2}+\frac{5}{2}i & 10+\frac{5}{2}i & -2-\frac{1}{2}i & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i \\ -1-i & -5 & 1 & -\sqrt{3}-\sqrt{3}i \end{bmatrix}$$

Esercizio 4. *(Esercizio 2 prima prova intermedia 15 novembre 2022)*
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\beta & \frac{1}{4} & \beta \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \beta & \frac{1}{4} & 3\beta \end{bmatrix}, \quad Q = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t,$$

dove α e β sono parametri reali, I è la matrice identità e $\mathbf{w} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^t$. Dire per quali valori di α la matrice A è non singolare e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si fissi ora $\alpha = -2$. Determinare lo spettro e il raggio spettrale di A e gli autovaloridi A^2. Determinare inoltre i valori di β che rendono B l'inversa di A. Verificare infine che $QQ^t = I$ e calcolare la matrice $M = (AQ)^{-1}$.

Soluzione: la matrice A è non singolare per $\alpha \neq \pm 2\sqrt{2}$ e i suoi autovalori sono positivi per $-2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$. Posto $\alpha = -2$, $\sigma(A) = \{4-2\sqrt{2}, 4, 4+2\sqrt{2}\}$, $\rho(A) = 4+2\sqrt{2}$, $\sigma(A^2) = \{24-16\sqrt{2}, 16, 24+16\sqrt{2}\}$. La matrice B è l'inversa di A per $\beta = \frac{1}{8}$, $QQ^t = I$ e

$$M = (AQ)^{-1} = Q^tB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Dopo aver verificato che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ calcolare $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_*$, essendo $\mathbf{v} = (1,0,1)^t$ e $\mathbf{w} = (3,2,-3)^t$.
Tali vettori sono ortogonali rispetto a questo prodotto scalare? E rispetto al prodotto scalare standard?

Soluzione: $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *non sono ortogonali rispetto a* $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$; $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard.*

Esercizio 6. (*Approfondimento*)
Nello spazio $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, dotato del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

si consideri la successione $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

a) Mostrare che le funzioni della successione data sono a due a due ortogonali.

b) Esibire una successione ortonormale nello spazio $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Soluzione: b) $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}$.