ESERCITAZIONE 2

24 ottobre 2024

Corso di: *Matematica Applicata*

Docente: prof.ssa Luisa Fermo

Tutor: dott. Marco Boi

Esercizio 1. Calcolare la serie di Fourier della funzione 2-periodica

$$f(x) = x^2 - 1$$

per $x \in [-1, 1]$.

Cosa è possibile dire sulla convergenza puntuale di tale serie? È differenziabile termine a termine?

Soluzione: $S_f(x) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(\pi k x)$.

Esercizio 2. Calcolare la serie di Fourier della funzione π-periodica

$$f(x) = e^x$$

per $x \in [0, \pi]$.

Stabilire, motivando opportunamente la risposta, qual è il valore della serie di Fourier di f nei punti $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Soluzione: $S_f(x) = \frac{1}{\pi}(e^\pi - 1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \frac{e^\pi - 1}{1 + 4k^2} \right) \cos(2kx) + \left(\frac{1}{\pi} \frac{4k(1 - e^\pi)}{1 + 4k^2} \right) \sin(2kx)$.

La serie in $x = 0$ e $x = \pi$ vale $\frac{1+e^\pi}{2}$; in $x = \frac{\pi}{2}$ vale $e^{\frac{\pi}{2}}$.

Esercizio 3. Ricorrendo alle serie di Fourier, determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + \frac{1}{4} y' + y = F(t),$$

essendo $F(t)$ la funzione 2π-periodica definita su $[-\pi, \pi]$ da

$$F(t) = |t|.$$

Soluzione: La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos(kt) + d_k \sin(kt)$$

con

$$c_k = \frac{32\Big((-1)^k - 1\Big)\Big(1 - k^2\Big)}{\pi k^2 \Big(16(1 - k^2)^2 + k^2\Big)},$$

$$d_k = \frac{8\Big((-1)^k - 1\Big)}{\pi k \Big(16(1 - k^2)^2 + k^2\Big)}.$$

Esercizio 4. *(Esercizio 3 del Compito numero 2 prima prova intermedia del 14 novembre 2023)*

Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo

$$-2y' + y = f(x), \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2},]$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{3} \\ 0, & -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \sin(x) & \frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kb_k}{1+16k^2} \cos(2kx) + \frac{b_k}{1+16k^2} \sin(2kx),$$

dove i coefficienti b_k sono dati da

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2k-1} \left(\sin \frac{\pi}{2}(2k-1) - \sin \frac{\pi}{3}(2k-1) \right) - \frac{1}{2k+1} \left(\sin \frac{\pi}{2}(2k+1) - \sin \frac{\pi}{3}(2k+1) \right) \right]$$