

## ESERCITAZIONE 4

28 novembre 2024

Corso di: *Matematica Applicata*

Docente: prof.ssa Luisa Fermo

Tutor: dott. Marco Boi

**Esercizio 1.** Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la prima e l'ultima colonna della sua inversa e il suo determinante.

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima colonna dell'inversa di  $A$  è  $[0, -2, 0, 1]^T$ ; l'ultima colonna dell'inversa di  $A$  è  $[-1, -0, \frac{1}{2}, 0]^T$ ;  
 $\det(A) = -16$

**Esercizio 2.** Determinare la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

mediante il metodo di Gauss.

*Soluzione.*

La soluzione del sistema è  $\mathbf{x} = [2, 1, -1]^T$

**Esercizio 3.** Stabilire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{C}$  il sistema

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 4\alpha x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2\alpha x_3 = 0 \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione. Per  $\alpha = -1$ , risolvere il sistema mediante la fattorizzazione  $PA = LU$ . Successivamente si risolva il sistema  $Ly = \mathbf{c}$  essendo  $\mathbf{c} = [\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{16}{9}]^T$ .

*Soluzione.*

Il sistema ammette unica soluzione se  $\alpha \neq 0, \pm \frac{i}{2}$ .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{20}{9} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema  $L\mathbf{y} = \mathbf{c}$  è  $[\frac{1}{2}, -1, 2]^T$ .

**Esercizio 4.** Utilizzare la fattorizzazione  $PA = LU$  per calcolare il determinante e l'inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione.*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice  $A$  vale 4;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$