ESERCITAZIONE 6

5 dicembre 2024

Corso di: *Matematica Applicata*

Docente: prof.ssa Luisa Fermo

Tutor: dott. Marco Boi

Esercizio 1. (Esercizio 3 Recupero prima prova intermedia 28 gennaio 2020)
Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 2]^T$. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$

Soluzione:
La matrice A è invertibile per $\alpha \neq 0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$. Gli autovalori sono positivi per $\alpha > \sqrt{2}/2$. IL metodo di Gauss-Siedel converge se $\alpha > \sqrt{2}/2$ oppure $\alpha > -\sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 0, 5/8]^T$

Esercizio 2. (Esercizio 2 prova scritta del 31 gennaio 2022)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2\gamma & 1 & 0 \\ 1 & -4\gamma & -1 \\ 0 & -1 & 2\gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$ si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione.
La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, \pm i/2$. Il metodo di Jacobi converge per $\gamma > 1/2$ oppure $\gamma < -1/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (1/2, 1/8, 1/16)^T$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori del parametro $s \in \mathbb{R}$ il sistema ammette un'unica soluzione e per quali il metodo di Jacobi e quello di Gauss Seidel convergono. Si consideri poi il caso $\alpha = 1/2$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel considerando come vettore iniziale il vettore nullo.

Soluzione Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $\alpha \neq \pm 2$. Il metodo di Jacobi e il metodo di Gauss Seidel convergono per $-2 < \alpha < 2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3/2, 7/2, 2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [5/8, 25/8, 2]^T$.
Le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 25/8 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 17/32 \\ 425/128 \\ 2 \end{bmatrix}$$