ESERCITAZIONE 7

12 dicembre 2024

Corso di: *Matematica Applicata*

Docente: prof.ssa Luisa Fermo

Tutor: dott. Marco Boi

Esercizio 1. (Esercizio 3 prova scritta del 14 giugno 2023)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = (x-1)y' + x^2 y, \quad x \in [1,3] \\ y(1) = 0, \; y'(1) = -1 \end{cases}$$

in un sistema del primo ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione $\eta_1 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)^T$, $\eta_2 = \left(-1, -\frac{29}{16}\right)^T$

Esercizio 2. (Esercizio 3 prova scritta del 18 febbraio 2020)
Si consideri il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{5}{4}h, \eta_k + \frac{5}{4}f(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Dopo averlo classificato, si dica se è convergente e, in caso affermativo, si dica quale è il suo ordine. Infine, si utilizzi tale schema con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la soluzione del seguente problema in $x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y' = \frac{y-1}{x+1}, \quad x \in [1,4] \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Lo schema è monostep esplicito a due stadi. È convergente del secondo ordine.
$\eta_1 = -1/12, \; \eta_2 = -1/6.$

Esercizio 3. (Esercizio 5 Secondo prova Intermedia 9 gennaio 2020)
Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{h}[3f(x_k, \eta_k) + 4f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))]$

b) $\eta_{k+1} = -\delta\eta_k + (1-\delta)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$

si determinino i valori dei parametri α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltra quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile per $0 \le \delta \le 2$. Lo schema (a) ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{1}{8}$ e $\beta = \frac{7}{8}$.