Algoritmo di Gram-Schmidt modificato

Algoritmo ideato inizialmente da Laplace nel 1816 e riscoperto da Bauer circa 150 anni dopo.

A differenza del classico metodo di Gram-Schmidt, questo è un algoritmo stabile

<u>OBIETTIVO</u> Assegnati n vettori linearmente indipendenti

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

si vuole costruire un insieme di vettori ortonormali $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

<u>PROCEDIMENTO</u> Per semplicità illustriamo il procedimento nel caso $n=4$.

I vettori assegnati sono pertanto

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

I^ PASSO: Calcoliamo la norma di v_1

$$r_{11} = \|v_1\|$$

e normalizziamo il primo vettore v_1

$$\boxed{q_1 = \frac{v_1}{r_{11}}}$$

In aggiunta, rendiamo ortogonali i vettori v_2, v_3, v_4 al vettore appena costruito q_1.

Definiamo quindi

- $v_2' = v_2 - r_{12} q_1$ dove r_{12} è uno scalare da determinare in modo che $\langle q_1, v_2' \rangle = 0$.

  Applicando le proprietà del prodotto scalare risulta

  $$\langle q_1, v_2' \rangle = \langle q_1, v_2 \rangle - r_{12} \underbrace{\langle q_1, q_1 \rangle}_{= 1}$$

  da cui imponendo che questo sia nullo abbiamo

  $$r_{12} = \langle q_1, v_2 \rangle$$

- $v_3' = v_3 - r_{13} q_1$ dove r_{13} è tale che $\langle q_1, v_3' \rangle = 0$

  Procedendo come fatto per v_2' troviamo

  $$r_{13} = \langle q_1, v_3 \rangle$$

- $v_4' = v_4 - r_{14} q_1$ dove r_{14} è tale che $\langle q_1, v_4' \rangle = 0$

L'output di questo primo passo è l'insieme

$$\{ q_1, \underbrace{v_2', v_3', v_4'}_{\text{sono vettori ortogonali a } q_1} \}$$

vettore di norma 1

II^ PASSO: Calcoliamo la norma di v'_2

$$r_{22} = \|v'_2\|$$

e normalizziamo v'_2

$$\boxed{q_2 = \frac{v'_2}{r_{22}}}$$

In aggiunta rendiamo ortogonali i vettori v'_3 e v'_4 al vettore q_2.

Definiamo quindi

- $v''_3 = v'_3 - r_{23}\, q_2$ dove lo scalare r_{23} deve essere tale che $\langle q_2, v''_3 \rangle = 0$.

  Procedendo come fatto prima risulta

  $$r_{23} = \langle q_2, v'_3 \rangle$$

- $v''_4 = v'_4 - r_{24}\, q_2$ dove

  $$r_{24} = \langle q_2, v'_4 \rangle .$$

Al termine di questo passo abbiamo

$$\{ \underbrace{q_1, q_2}, \underbrace{v''_3, v''_4} \}$$

i vettori q_1 e q_2 hanno norma 1 e sono ortogonali tra di loro

i vettori v''_3 e v''_4 sono ortogonali ai precedenti

III° PASSO: Calcoliamo la norma di v_3''

$$r_{33} = \| v_3'' \|$$

e normalizziamo tale vettore

$$\boxed{q_3 = \frac{v_3''}{r_{33}}}$$

In aggiunta, rendiamo ortogonale al vettore q_3 il vettore v_4''.

- $v_4''' = v_4'' - r_{34} q_3$ dove

$$r_{34} = \langle q_3, v_4'' \rangle .$$

Al termine di questo passo abbiamo

$$\{ q_1, q_2, q_3, v_4''' \}$$

↳ vettore ortogonale ai precedenti

vettori di norma 1
e ortogonali tra di essi

IV° PASSO: Normalizziamo v_4''' calcolando

$r_{44} = \| v_4''' \|$ da cui $\boxed{q_4 = \frac{v_4'''}{r_{44}}}$

ESERCIZIO

Applicare il procedimento di Gram - Schmidt modificato ai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I° PASSO $\quad r_{11} = \|v_1\| = \sqrt{2}$

$$q_1 = \frac{v_1}{r_{11}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Inoltre, costruiamo i vettori

- $v'_2 = v_2 - r_{12}\, q_1$ dove

$$r_{12} = \langle q_1, v_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

- $v'_3 = v_3 - r_{13}\, q_1$ dove

$$r_{13} = \langle q_1, v_3 \rangle = \sqrt{2}$$

$$v'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

II^{a} PASSO $\quad r_{22} = \|v'_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$q_2 = \frac{v'_2}{r_{22}} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

- $v''_3 = v'_3 - r_{23}\, q_2$ dove

$$r_{23} = \langle q_2, v'_3 \rangle = -\sqrt{2}$$

$$v''_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III^{a} PASSO $\quad r_{33} = \|v''_3\| = 1$

$$q_3 = \frac{v''_3}{\|v''_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$