

REGISTRO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA
CORSI DI LAUREA IN BIOMEDICA E CHIMICA
6 CFU - A.A. 2021/2022
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 20 DICEMBRE 2021

1. Lunedì 27/09/2021, 8–10. ore: 2(2)

Introduzione al corso: programma del corso, tutorato e modalità di esame. Problemi risolvibili: problemi ben posti e ben condizionati. Esempi di problemi mal posti. Definizione di algoritmo ed esempi.

2. Martedì 28/09/2021, 17–19. ore: 2(4)

Stabilità e complessità computazionale di un algoritmo. Spazi vettoriali: definizione ed esempi (gli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , lo spazio dei polinomi, lo spazio delle funzioni $L^2([a, b])$, lo spazio delle funzioni continue). Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Richiami sul modulo di un numero complesso.

3. Mercoledì 29/09/2021, 11–13. ore: 2(6)

Spazio generato da n vettori. Basi e dimensione. Esempi. Spazi normati. Norme vettoriali in \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n con indice 1, 2 e ∞ . Norma di funzione di $L^2([a, b])$. Normalizzazione. Spazi di Hilbert. Norma indotta dal prodotto scalare. Prodotto scalare di \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n e $L^2([a, b])$.

4. Lunedì 04/10/2021, 8–10. ore: 2(8)

Ortogonalità e ortonormalità. Base ortonormale. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Esercizio sul metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

5. Martedì 05/10/2021, 17–19. ore: 2(10)

Definizione di matrice ed esempi. Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare. Matrice trasposta e matrice aggiunta. Prodotto tra matrici. Proprietà del prodotto tra matrici e relazioni con il prodotto scalare. Potenza di una matrice. Proprietà sulla trasposta della matrice somma e matrice prodotto. Proprietà sull'aggiunta della matrice somma e matrice prodotto. Matrice identità.

6. Mercoledì 06/10/2021, 11–13. ore: 2(12)

Definizione di matrice inversa e sue proprietà. Definizione di matrice ortogonale, matrice unitaria. Esercizio su matrice ortogonale e matrice inversa. Determinante e sue proprietà. Regola di Laplace per il calcolo del determinante. Autovalori e autovettori. Definizione di spettro e raggio spettrale. Proprietà degli autovalori.

7. Lunedì 11/10/2021, 08–10. ore: 2(14)

Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Esempi. Estensione di una funzione per periodicità. Funzioni continue a tratti. Armoniche elementari. Polinomio trigonometrico. Sistema trigonometrico.

8. Martedì 12/10/2021, 17–19. ore: 2(16)

Ortogonalità e ortonormalità del sistema trigonometrico. Formule di Werner. Integrazione di una funzione periodica su un periodo. Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico.

9. Mercoledì 13/10/2021, 11–13. ore: 2(18)

Il polinomio trigonometrico di migliore approssimazione. Serie di Fourier: forma trigonometrica e forma armonica. Esercizio. Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza della serie di Fourier.

10. Lunedì 18/10/2021, 08–10. ore: 2(20)

Lemma di Riemann-Lebesgue. Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Esercizio sulle serie di Fourier. Formula di Eulero. Forma complessa della serie di Fourier.

11. Martedì 19/10/2021, 17–19. ore: 2(22)

Legame tra i coefficienti delle forme reale e complessa. Integrabilità termine a termine di una serie di Fourier. Derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali. Esercizio.

12. Mercoledì 20/10/2021, 11–13. ore: 2(24)

Risoluzione di ODE con serie di Fourier: il caso di ODE a coefficienti costanti con termine noto pari o dispari. Esercizio. Introduzione alla trasformata di Fourier. Trasformata inversa. Calcolo della trasformata di Fourier dell'impulso esponenziale troncato a sinistra.

13. Lunedì 25/10/2021, 08–10. ore: 2(26)

Calcolo della trasformata di Fourier dell'impulso esponenziale troncato a destra. Calcolo della trasformata di Fourier dell'impulso esponenziale pari, dell'impulso esponenziale dispari e dell'onda quadra. Funzione sinc. Delta di Dirac e sua trasformata. Trasformata della Gaussiana. Proprietà della trasformata di Fourier: linearità e traslazione nello spazio ordinario. Esercizi.

14. Martedì 26/10/2021, 17–19. ore: 2(28)

Proprietà della trasformata di Fourier: traslazione nello spazio delle frequenze, variazione di scala, simmetria. Esercizi.

15. Mercoledì 27/10/2021, 11–13. ore: 2(30)

Proprietà della trasformata di Fourier di modulazione e derivazione nello spazio delle frequenze. Convoluzione e sua proprietà di commutatività. Esercizi.

16. Martedì 02/11/2021, 17–19. ore: 2(32)

Trasformata della convoluzione. Esercizi. Trasformata della derivata di una funzione. Esercizi. Risoluzione di un'equazione differenziale mediante la trasformata di Fourier. Esercizi.

17. Mercoledì 03/11/2021, 11–13. ore: 2(34)

Introduzione alla risoluzione di sistemi lineari e possibili rappresentazioni. Matrici sparse e matrici dense. Matrici strutturate: matrici diagonali, triangolari (superiore o inferiore), unitarie e ortogonali, hermitiane e simmetriche. Matrici definite positive e semidefinite positive. Matrici diagonalmente dominanti per righe o colonne.

18. Lunedì 22/11/2021, 08–10. ore: 2(36)

Norme matriciali. Proprietà di submoltiplicatività e consistenza. La norma di Frobenius. Norme naturali. Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice ∞ , con indice 1 e indice 2. Osservazioni sulle norme di matrici simmetriche e matrici ortogonali.

19. Martedì 23/11/2021, 17–19. ore: 2(38)

Condizionamento relativo di un sistema lineare in presenza di errori sui soli termini noti. Indice di condizionamento. Proprietà dell'indice di condizionamento. Condizionamento ottimale. Il caso delle matrici ortogonali. Il caso delle matrici simmetriche. Esercizio sul condizionamento.

20. Mercoledì 24/11/2021, 11–13. ore: 2(40)

La matrice di Hilbert. Osservazione sul condizionamento, determinante e autovalori. Dimostrazione dell'indice di condizionamento in norma 1 e ∞ di una matrice ortogonale. Metodo di risoluzione di un sistema lineare ortogonale e sua complessità computazionale. Sistemi lineari diagonali: algoritmo di risoluzione e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare inferiore: algoritmo e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare superiore: algoritmo e complessità. Principi di equivalenza per i sistemi lineari.

21. Martedì 30/11/2021, 17–19. ore: 2(42)

Il metodo di eliminazione di Gauss (senza pivoting): analisi dei primo due passi e complessità computazionale. Fattorizzazione $A=LU$.

22. Mercoledì 1/12/2021, 11–13. ore: 2(44)

Calcolo del determinante di una matrice, inversa di una matrice e risoluzione di un sistema lineare mediante la fattorizzazione $A = LU$. Arresto dell'algoritmo di Gauss in presenza di un pivot nullo. Il caso delle matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti non singolari. Problemi di accumulo errori nell'algoritmo di Gauss. Algoritmo di Gauss con pivoting parziale.

23. Giovedì 2/12/2021, 14–16. ore: 2(46)

Proprietà del metodo di Gauss con pivoting parziale. Fattorizzazione $PA = LU$. Matrici di scambio e di permutazione. Costruzione della matrice L . Applicazioni della fattorizzazione $PA = LU$ alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa. Esercizio.

24. Lunedì 6/12/2021, 08–10. ore: 2(48)

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Primo esercizio sul calcolo delle iterate. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo.

25. Martedì 7/12/2021, 17–19. ore: 2(50)

Metodo di Jacobi e Gauss-Seidel: costruzioni e proprietà. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti. Esercizio.

26. Lunedì 13/12/2021, 08–10. ore: 2(52)

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Il problema di Cauchy associato a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Teorema di esistenza e unicità (locale e globale) della soluzione. Metodi alle differenze finite. Discretizzazione del dominio. Metodo di Eulero esplicito per una equazione differenziale ordinaria.

27. Martedì 14/12/2021, 17–19. ore: 2(54)

Metodo di Eulero esplicito per sistemi di ODE. Esercizio. Metodo di Eulero implicito e metodo del punto medio. Esercizi.

28. Mercoledì 15/12/2021, 17–19. ore: 2(56)

Metodo di Crank-Nicolson. Metodo di Heun. Metodo di Eulero modificato. Analisi dei metodi monostep. Errore globale di discretizzazione, locale di discretizzazione e di propagazione. Convergenza, consistenza e stabilità di una formula alle differenze finite. Stabilità dei metodi monostep. Analisi della convergenza, consistenza e stabilità del metodo di Eulero.

29. Giovedì 16/12/2021, 14–16. ore: 2(58)

Analisi della convergenza, consistenza e stabilità del metodo di Heun. Verifica della consistenza per alcune formule monostep mediante sviluppo in serie dell'errore locale di discretizzazione. Esercizio. Formulazione generale dei metodi multistep. Polinomio caratteristico associato ad un metodo multistep. Stabilità. Criterio delle radici. Teorema di Dahlquist. Convergenza dei metodi multistep. Prima barriera di Dahlquist.

30. Lunedì 20/12/2021, 8–10. ore: 2(60)

Analisi della consistenza e stabilità del metodo del punto medio. Esercizi sui metodi multistep. Esercizio sul metodo iterativo di Jacobi.