

REGISTRO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA
CORSI DI LAUREA IN BIOMEDICA E CHIMICA
6 CFU - A.A. 2022/2023
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 21 DICEMBRE 2022

1. Lunedì 03/10/2022, 8–10. ore: 2(2)

Introduzione al corso: programma del corso, tutorato e modalità di esame. Problemi risolvibili: problemi ben posti e ben condizionati. Esempi di problemi mal posti. Definizione di algoritmo ed esempi.

2. Martedì 04/10/2022, 17–19. ore: 2(4)

Stabilità e complessità computazionale di un algoritmo. Spazi vettoriali: definizione ed esempi (gli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , lo spazio dei polinomi, lo spazio delle funzioni $L^2([a, b])$, lo spazio delle funzioni continue). Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Spazio generato da n vettori. Basi e dimensione. Esempi.

3. Mercoledì 05/10/2022, 11–13. ore: 2(6)

Spazi normati. Norme vettoriali in \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n con indice 1, 2 e ∞ . Norma di funzione di $L^2([a, b])$. Richiami sul modulo di un numero complesso. Normalizzazione. Spazi di Hilbert. Norma indotta dal prodotto scalare. Prodotto scalare di \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n e $L^2([a, b])$. Ortogonalità e ortonormalità. Base ortonormale.

4. Lunedì 10/10/2022, 8–10. ore: 2(8)

Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Esercizio sul metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Definizione di matrice ed esempi. Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare. Matrice trasposta e matrice aggiunta. Prodotto tra matrici. Proprietà del prodotto tra matrici e relazioni con il prodotto scalare.

5. Martedì 11/10/2022, 17–19. ore: 2(10)

Potenza di una matrice. Proprietà sulla trasposta della matrice somma e matrice prodotto. Proprietà sull'aggiunta della matrice somma e matrice prodotto. Matrice identità. Definizione di matrice inversa e sue proprietà. Definizione di matrice ortogonale, matrice unitaria. Determinante e sue proprietà. Regola di Laplace per il calcolo del determinante. Esercizi.

6. Mercoledì 12/10/2022, 11–13. ore: 2(12)

Autovalori e autovettori. Definizione di spettro e raggio spettrale. Proprietà degli autovalori. Esercizi. Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Esempi. Estensione di una funzione per periodicità.

7. Lunedì 17/10/2022, 08–10. ore: 2(14)

Funzioni continue a tratti. Armoniche elementari. Polinomio trigonometrico. Sistema trigonometrico. Ortogonalità e prime formule di Werner.

8. Martedì 18/10/2022, 17–19. ore: 2(16)

Terza formula di Werner. Ortogonalità e ortonormalità del sistema trigonometrico. Integrazione di una funzione periodica su un periodo. Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Serie di Fourier in forma trigonometrica e primi esercizi.

9. Mercoledì 19/10/2022, 11–13. ore: 2(18)

Osservazioni sul polinomio trigonometrico: polinomio di migliore approssimazione. Serie di Fourier: forma trigonometrica e forma armonica. Esercizio. Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza della serie di Fourier. Lemma di Riemann-Lebesgue.

10. Lunedì 24/10/2022, 08–10. ore: 2(20)

Teorema sulla Serie di Fourier di funzioni pari e dispari con dimostrazioni. Formula di Eulero. Forma complessa della serie di Fourier. Legame tra i coefficienti delle forme reale e complessa.

11. Martedì 25/10/2022, 17–19. ore: 2(22)

Esercizio sulla serie in forma complessa. Integrabilità termine a termine di una serie di Fourier. Derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Esercizi.

12. Mercoledì 26/10/2022, 11–13. ore: 2(24)

Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali. Risoluzione di ODE con serie di Fourier: il caso di ODE a coefficienti costanti con termine noto pari o dispari. Esercizio. Introduzione alla trasformata di Fourier.

13. Mercoledì 02/11/2022, 11–13. ore: 2(26)

Trasformata di Fourier. Trasformata inversa. Trasformate di funzioni elementari con calcolo esplicito della trasformata di Fourier dell' impulso esponenziale troncato a sinistra, impulso esponenziale pari, onda quadra e Delta di Dirac. Proprietà della trasformata di Fourier: linearità e traslazione nello spazio ordinario. Esercizi.

14. Lunedì 07/11/2022, 08–10. ore: 2(28)

Proprietà della trasformata di Fourier: traslazione nello spazio delle frequenze, variazione di scala, simmetria e modulazione. Esercizi.

15. Martedì 08/11/2022, 17–19. ore: 2(30)

Proprietà di derivazione nello spazio delle frequenze. Convulsione e sua proprietà di commutatività. Trasformata della convulsione. Esercizi.

16. Mercoledì 09/11/2022, 11–13. ore: 2(32)

Trasformata della derivata di una funzione. Esercizi. Risoluzione di un'equazione differenziale mediante la trasformata di Fourier. Esercizi.

17. Lunedì 21/11/2022, 08–10. ore: 2(34)

Introduzione alla risoluzione di sistemi lineari e possibili rappresentazioni. Matrici sparse e matrici dense. Matrici strutturate: matrici diagonali, triangolari (superiore o inferiore), unitarie e ortogonali, hermitiane e simmetriche. Matrici definite positive e semidefinite positive.

18. Martedì 22/11/2022, 17–19. ore: 2(36)

Matrici diagonalmente dominanti per righe o colonne. Norme matriciali. Proprietà di submoltiplicatività e consistenza. La norma di Frobenius. Norme naturali. Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice ∞ , con indice 1 e indice 2. Osservazioni sulle norme di matrici simmetriche e matrici ortogonali.

19. Mercoledì 23/11/2022, 11–13. ore: 2(38)

Condizionamento relativo di un sistema lineare in presenza di errori sui soli termini noti. Indice di condizionamento. Proprietà dell'indice condizionamento. Condizionamento ottimale. Il caso delle matrici ortogonali. Il caso delle matrici simmetriche. Esercizio sul condizionamento. La matrice di Hilbert.

20. Lunedì 28/11/2022, 08–10. ore: 2(40)

Metodo di risoluzione di un sistema lineare ortogonale e sua complessità computazionale. Sistemi lineari diagonali: algoritmo di risoluzione e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare inferiore: algoritmo e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare superiore: algoritmo e complessità. Principi di equivalenza per i sistemi lineari. Esercizio.

21. Martedì 29/11/2022, 17–19. ore: 2(42)

Il metodo di eliminazione di Gauss (senza pivoting): analisi dei primo due passi e complessità computazionale. Fattorizzazione $A=LU$. Calcolo del determinante di una matrice, inversa di una matrice e risoluzione di un sistema lineare mediante la fattorizzazione $A = LU$.

22. Mercoledì 30/11/2022, 11–13. ore: 2(44)

Arresto dell'algoritmo di Gauss in presenza di un pivot nullo. Il caso delle matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti non singolari. Problemi di accumulo errori nell'algoritmo di Gauss. Algoritmo di Gauss con pivoting parziale. Fattorizzazione $PA = LU$. Matrici di scambio e di permutazione. Costruzione della matrice L .

23. Lunedì 5/12/2022, 08–10. ore: 2(46)

Applicazioni della fattorizzazione $PA = LU$ alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa. Esercizio.

24. Martedì 6/12/2022, 17–19. ore: 2(48)

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Primo esercizio sul calcolo delle iterate. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo.

25. Mercoledì 7/12/2022, 11–13. ore: 2(50)

Metodo di Jacobi e Gauss-Seidel: costruzioni e proprietà. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti. Esercizio sul metodo di Jacobi.

26. Lunedì 12/12/2022, 08–10. ore: 2(52)

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Il problema di Cauchy associato a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Teorema di esistenza e unicità (locale e globale) della soluzione. Esercizio sul metodo di Gauss-Seidel.

27. Martedì 13/12/2022, 17–19. ore: 2(54)

Metodi alle differenze finite. Discretizzazione del dominio. Metodo di Eulero esplicito per una equazione differenziale ordinaria. Metodo di Eulero esplicito per sistemi di ODE. Esercizio. Metodo di Eulero implicito. Esercizio.

28. Mercoledì 14/12/2022, 11–13. ore: 2(56)

Il metodo del punto medio. Metodo di Crank-Nicolson. Metodo di Heun. Metodo di Eulero modificato. Esercizi.

29. Lunedì 19/12/2022, 08–10. ore: 2(58)

Analisi dei metodi monostep. Errore globale di discretizzazione, locale di discretizzazione e di propagazione. Convergenza, consistenza e stabilità di una formula alle differenze finite. Stabilità dei metodi monostep. Verifica della consistenza mediante sviluppo in serie dell'errore locale di discretizzazione. Analisi della convergenza, consistenza e stabilità del metodo di Eulero e del metodo di Heun. Prova d'esame.

30. Martedì 20/12/2022, 17–19. ore: 2(60)

Formulazione generale dei metodi multistep. Polinomio caratteristico associato ad un metodo multistep. Stabilità. Criterio delle radici. Teorema di Dahlquist. Consistenza dei metodi multistep. Analisi della consistenza e stabilità del metodo del punto medio. Convergenza dei metodi multistep. Prima barriera di Dahlquist.