

REGISTRO DELLE LEZIONI DI
Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AMBIENTALE PER LO
SVILUPPO SOSTENIBILE
Calcolo Numerico
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA
6 CFU - A.A. 2022/2023
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 16 DICEMBRE 2022

1. Lunedì 03/10/2022, 11–13. ore: 2(2)

Introduzione al corso. Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie (ODE) di ordine n . Omogeneità, linearità. Esempi. Definizione di equazione alle derivate parziali in n variabili di ordine r . Omogeneità, linearità. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine per funzioni in due variabili: equazioni ellittiche, paraboliche e iperboliche.

2. Mercoledì 05/10/2022, 8–10. ore: 2(4)

Esempi di modelli matematici che coinvolgono PDEs di tipo ellittico, parabolico e iperbolico: equazione di Poisson, l'equazione del calore e l'equazione delle onde. Problemi stazionari e problemi evolutivi. Esempi di problemi di tipo Dirichlet e di tipo Neumann. Esempi di problemi di tipo Cauchy-Dirichlet e di tipo Cauchy-Neumann. Richiami sulla risoluzione analitica di ODE: ODE del primo ordine omogenee.

3. Venerdì 07/10/2022, 9–11. ore: 2(6)

Risoluzione analitica di ODE del primo ordine non omogenea. Problema di Cauchy. Risoluzione di ODE del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee. Esercizio. Risoluzione di ODE del secondo ordine a coefficienti costanti avente come termine noto una funzione esponenziale e un polinomio trigonometrico. Esercizi.

4. Lunedì 10/10/2022, 11–13. ore: 2(8)

Risoluzione di ODE del secondo ordine a coefficienti costanti avente come termine noto un polinomi algebrico. Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Estensione di una funzione per periodicità. Esempi. Funzioni continue a tratti. Armoniche elementari.

5. Mercoledì 12/10/2022, 08–10. ore: 2(10)

Richiami sugli spazi di Hilbert. Lo spazio $L^2([a, b])$. Polinomio trigonometrico. Ortogonalità del sistema trigonometrico. Formule di Werner. L'ortonormalità del sistema trigonometrico. Integrazione di una funzione periodica su un periodo.

6. Venerdì 14/10/2022, 8–10. ore: 2(12)

Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Polinomio di migliore approssimazione. Serie di Fourier in forma trigonometrica e in forma armonica. Esercizio sul calcolo della serie di Fourier di una data funzione.

7. Lunedì 17/10/2022, 11–13. ore: 2(14)

Funzione regolare a tratti. Lemma di Riemann-Lebesgue. Teorema di convergenza della Serie di Fourier. Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Esercizio sulla serie di Fourier.

8. Venerdì 21/10/2022, 8–10. ore: 2(16)

Integrabilità e derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali. Esercizio.

9. Lunedì 24/10/2022, 11–13. ore: 2(18)

Il problema di Sturm-Liouville: forma canonica, autovalori e autofunzioni, spettro, proprietà dello spettro, funzione peso, ortogonalità delle autofunzioni. Esercizio sul problema di Sturm-Liouville: determinazione dello spettro.

10. Mercoledì 26/10/2022, 08–10. ore: 2(20)

Esercizi sul problema di Sturm-Liouville. Sviluppo in serie di funzioni a quadrato integrabile mediante autofunzioni e calcolo dei relativi coefficienti.

11. Venerdì 28/10/2022, 8–10. ore: 2(22)

Esercizio sul problema di Sturm Liouville. Il metodo degli integrali generali. Idea e applicazioni al caso delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

12. Mercoledì 02/11/2022, 08–10. ore: 2(24)

Il metodo degli integrali generali: il caso delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico. Applicazione all'equazione delle onde con velocità e posizione iniziale non nulla. Esercizio di una prova d'esame. Il metodo di separazione delle variabili. Applicazioni al caso di equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

13. Venerdì 04/11/2022, 08–10. ore: 2(26)

Il metodo di separazione delle variabili. Applicazioni al caso di equazioni alle derivate parziali del primo ordine e del secondo ordine di tipo ellittico.

14. Venerdì 04/11/2022, 15–17. ore: 2(28)

Esercizi di riepilogo sulla risoluzione di ODE con serie di Fourier, metodo degli integrali generali, problemi di Sturm-Liouville.

15. Lunedì 07/11/2022, 11–13. ore: 2(30)

Applicazioni del metodo di separazione delle variabili a PDE di tipo parabolico. La tecnica delle funzioni ausiliarie.

16. Mercoledì 09/11/2022, 08–10. ore: 2(32)

Richiami su risoluzione numerica di matrici dense e matrici sparse, matrici diagonali, triangolari superiori e inferiori, matrici ortogonali. Richiami sul calcolo di autovalori, spettro e raggio spettrale. Matrici simmetriche definite positive e semi-definite positive. Esercizio.

17. Lunedì 14/11/2022, 11–13. ore: 2(34)

Richiami su matrici diagonalmente dominanti per righe e/o colonne. Matrici di permutazione. Matrici riducibile e irriducibili. Richiami su norme vettoriali e norme matriciali. Esempi.

18. Mercoledì 16/11/2022, 08–10. ore: 2(36)

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Un primo esercizio sul calcolo delle iterate. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo.

19. Venerdì 18/11/2022, 08–10. ore: 2(38)

Il metodo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel. Proprietà di parallelizzabilità. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive, diagonalmente dominanti in senso stretto e diagonalmente dominante e irriducibili. Il caso delle matrici tridiagonali. Esercizio sul metodo di Jacobi.

20. Lunedì 21/11/2022, 11–13. ore: 2(40)

Esercizio sul metodo di Gauss-Seidel. Metodi alle differenze finite per problemi di Cauchy del primo ordine. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Discretizzazione del dominio. Differenza finita in avanti. Metodo di Eulero esplicito. Esercizio.

21. Mercoledì 23/11/2022, 08–10. ore: 2(42)

Differenza finita all'indietro. Metodo di Eulero implicito. Analogie e differenze con il metodo di Eulero esplicito. Esercizio. Differenza finita centrata. Il metodo del punto medio multistep esplicito. La questione dell'inizializzazione dei metodi multistep. Esercizio. Cenni all'errore globale di discretizzazione, consistenza e stabilità di metodi monostep.

22. Lunedì 28/11/2022, 11–13. ore: 2(44)

Metodi alle differenze finite per una ODE del secondo ordine con valori agli estremi: differenze finite centrali, schema numerico di discretizzazione, analisi della matrice dei coefficienti del sistema lineare. Scelta del passo di discretizzazione per garantire l'invertibilità del sistema e la convergenza dei metodi iterativi di Gauss-Seidel e Jacobi.

23. Mercoledì 30/11/2022, 08–10. ore: 2(46)

Errore teorico dell'errore per lo schema di discretizzazione di una ODE con valori agli estremi. Il teorema di Gershgorin. Esercizio su come costruire un esempio con soluzione esatta assegnata. Prova d'esame.

24. Venerdì 2/12/2022, 08–10. ore: 2(48)

Schema alle differenze finite centrali per PDE ellittiche (schema a 5 punti). Schema numerico e sistema lineare.

25. Venerdì 2/12/2022, 15–17. ore: 2(50)

Analisi del sistema pentadiagonale. Analisi teorica dell'errore. Esercizio su metodi alle differenze finite per PDE ellittiche.

26. Lunedì 5/12/2022, 11–13. ore: 2(52)

Metodi alle differenze finite per PDE paraboliche. Discretizzazione della derivata in tempo con differenza finita all'indietro. Schema di discretizzazione a 4 punti. Analisi della matrice dei coefficienti del risultante sistema lineare.

27. Mercoledì 7/12/2022, 08–10. ore: 2(54)

Analisi dell'errore dello schema di discretizzazione a 4 punti. Prova d'esame. Metodi alle differenze finite per PDE iperboliche. Problemi relativi a un eventuale schema a 5 punti. Approssimazione della soluzione ai primi due istanti temporali.

28. Lunedì 12/12/2022, 11–13. ore: 2(56)

Metodi delle differenze finite a sette punti per PDE iperboliche. Analisi della matrice del sistema lineare a cui si perviene. Esercizio sullo schema numerico sviluppato.

29. Mercoledì 14/12/2022, 08–10. ore: 2(58)

Approssimazione di una funzione: errore di migliore approssimazione e polinomio di migliore approssimazione. Il teorema di Weierstrass. Il polinomio di Taylor. Esempi e svantaggi. Polinomio interpolante: esistenza e unicità. Il polinomio di Lagrange. Stima teorica dell'errore. Applicazione alle PDEs paraboliche: calcolo del polinomio interpolante di Lagrange per la scelta del vettore iniziale nei metodi iterativi.

30. Venerdì 16/12/2023, 08–10. ore: 2(60)

Esercitazione riepilogativa. Esercizi su metodi iterativi, metodo alle differenze finite per problemi ai limiti e metodo alle differenze finite per PDEs ellittiche.