

**REGISTRO DELLE LEZIONI DI  
MATEMATICA APPLICATA**  
CORSI DI LAUREA IN BIOMEDICA E CHIMICA  
6 CFU - A.A. 2023/2024  
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO  
ULTIMO AGGIORNAMENTO: DECEMBER 30, 2023

**1. Lunedì 02/10/2023, 8–10. ore: 2(2)**

---

Introduzione al corso: programma del corso, tutorato e modalità di esame. Problemi risolvibili: problemi ben posti e ben condizionati. Esempi di problemi mal posti.

**2. Martedì 03/10/2023, 17–19. ore: 2(4)**

---

Definizione di algoritmo ed esempi. Stabilità e complessità computazionale di un algoritmo. Spazi vettoriali: definizione ed esempi (gli spazi  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ , lo spazio dei polinomi, lo spazio delle funzioni  $L^2([a, b])$ , lo spazio delle funzioni continue).

**3. Mercoledì 04/10/2023, 11–13. ore: 2(6)**

---

Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Spazio generato da  $n$  vettori. Basi e dimensione. Esempi. Spazi normati. Norme vettoriali in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  con indice 1, 2 e  $\infty$ . Norma di funzione di  $L^2([a, b])$ . Richiami sul modulo di un numero complesso. Normalizzazione. Spazi di Hilbert. Norma indotta dal prodotto scalare. Prodotto scalare di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  e  $L^2([a, b])$ . Ortogonalità e ortonormalità.

**4. Giovedì 5/10/2023, 14–16. ore: 2(8)**

---

Base ortonormale. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt modificato. Esercizio sul metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Definizione di matrice ed esempi. Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare. Matrice trasposta e matrice aggiunta. Prodotto tra matrici.

**5. Lunedì 9/10/2023, 08–10. ore: 2(10)**

---

Proprietà del prodotto tra matrici e relazioni con il prodotto scalare. Potenza di una matrice. Proprietà sulla trasposta della matrice somma e matrice prodotto. Proprietà sull'aggiunta della matrice somma e matrice prodotto. Matrice identità. Definizione di matrice inversa e sue proprietà. Definizione di matrice ortogonale, matrice unitaria. Determinante e sue proprietà. Regola di Laplace per il calcolo del determinante. Esercizi.

**6. Martedì 10/10/2023, 17–19. ore: 2(12)**

---

Autovalori e autovettori. Definizione di spettro e raggio spettrale. Proprietà degli autovalori. Esercizi.

**7. Lunedì 16/10/2023, 08–10. ore: 2(14)**

---

Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Esempi. Estensione di una funzione per periodicità. Funzioni continue a tratti. Armoniche elementari. Polinomio trigonometrico. Sistema trigonometrico

**8. Martedì 17/10/2023, 17–19. ore: 2(16)**

---

Ortogonalità e ortonormalità del sistema trigonometrico e formule di Werner. Integrazione di una funzione periodica su un periodo.

**9. Mercoledì 18/10/2023, 11–13. ore: 2(18)**

---

Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Osservazioni sul polinomio trigonometrico: polinomio di migliore approssimazione. Serie di Fourier in forma trigonometrica e primi esercizi.

**10. Lunedì 23/10/2023, 08–10. ore: 2(20)**

---

Serie di Fourier: forma trigonometrica e forma armonica. Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza della serie di Fourier. Teorema sulla Serie di Fourier di funzioni pari e dispari con dimostrazioni. Esercizio.

**11. Martedì 24/10/2023, 17–19. ore: 2(22)**

---

Integrabilità termine a termine di una serie di Fourier. Esempio. Derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali. Risoluzione di ODE con serie di Fourier: il caso di ODE a coefficienti costanti con termine noto pari o dispari.

**12. Mercoledì 25/10/2023, 11–13. ore: 2(24)**

---

Trasformata di Fourier e sua trasformata inversa. Trasformate di funzioni elementari con calcolo esplicito della trasformata di Fourier dell' impulso esponenziale troncato a destra, impulso esponenziale troncato a sinistra, impulso esponenziale pari e impulso esponenziale dispari. Proprietà di linearità.

**13. Lunedì 6/11/2023, 08–10. ore: 2(26)**

---

Onda quadra e Delta di Dirac. Proprietà della trasformata di Fourier: traslazione nello spazio ordinario, traslazione nello spazio delle frequenze e variazione di scala. Esercizi.

**14. Martedì 7/11/2023, 17–19. ore: 2(28)**

---

Proprietà della trasformata di Fourier: simmetria e modulazione e derivazione nello spazio delle frequenze. Convoluzione e sua proprietà di commutatività. Esercizi.

**15. Mercoledì 8/11/2023, 11–13. ore: 2(30)**

---

Trasformata della convoluzione. Trasformata della derivata di una funzione. Risoluzione di un'equazione differenziale mediante la trasformata di Fourier. Esercizi.

**16. Lunedì 20/11/2023, 08–10. ore: 2(32)**

---

Formula di Eulero. Forma complessa della serie di Fourier. Legame tra i coefficienti delle forme reale e complessa. Introduzione alla risoluzione di sistemi lineari e possibili rappresentazioni. Matrici sparse e matrici dense. Matrici strutturate: matrici diagonali.

**17. Martedì 21/11/2023, 17–19. ore: 2(34)**

---

Risoluzione numerica di un sistema lineare diagonale e sua complessità computazionale. Matrici triangolari (superiore o inferiore): proprietà e algoritmo di sostituzione in avanti e all'indietro con analisi della complessità computazionale. Matrici unitarie e ortogonali  $Q$ : proprietà sul modulo del determinante, modulo degli autovalori e norma due di  $Qx$

**18. Mercoledì 22/11/2023, 11–13. ore: 2(36)**

---

Risoluzione di un sistema lineare con matrici ortogonali. Matrici hermitiane e simmetriche: proprietà degli autovalori. Matrici definite positive e semidefinite positive. Esercizio. Matrici diagonalmente dominanti per righe o colonne. Norme matriciali. Proprietà di submoltiplicatività e consistenza. La norma di Frobenius. Norme naturali.

**19. Giovedì 23/11/2023, 14–16. ore: 2(38)**

---

Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice  $\infty$ , con indice 1 e indice 2. Osservazioni sulle norme di matrici simmetriche e matrici ortogonali. Condizionamento relativo di un sistema lineare in presenza di errori sui soli termini noti.

**20. Lunedì 27/11/2023, 8–10. ore: 2(40)**

---

Indice di condizionamento. Proprietà dell'indice di condizionamento. Condizionamento ottimale. Il caso delle matrici ortogonali. Il caso delle matrici simmetriche. Esercizio sul condizionamento. La matrice di Hilbert.

**21. Martedì 28/11/2023, 17–19. ore: 2(42)**

---

Introduzione ai metodi diretti per sistemi lineari. Principi di equivalenza per i sistemi lineari. Il metodo di eliminazione di Gauss (senza pivoting): analisi dei primi due passi e complessità computazionale. Fattorizzazione  $A=LU$ . Calcolo del determinante di una matrice e risoluzione di un sistema lineare mediante la fattorizzazione  $A = LU$ .

**22.** Lunedì 4/12/2023, 08–10. **ore: 2(44)**

Calcolo dell'inversa di una matrice con la fattorizzazione  $A=LU$ . Esercizio. Arresto dell'algoritmo di Gauss in presenza di un pivot nullo. Il caso delle matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti non singolari. Problemi di accumulo errori nell'algoritmo di Gauss. Algoritmo di Gauss con pivoting parziale.

**23.** Martedì 5/12/2023, 17–19. **ore: 2(46)**

Fattorizzazione  $PA = LU$ . Matrici di scambio e di permutazione  $P$ . Costruzione della matrice  $L$ . Applicazioni della fattorizzazione  $PA = LU$  alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa. Esercizio.

**24.** Mercoledì 6/12/2023, 11–13. **ore: 2(48)**

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Primo esercizio sul calcolo delle iterate. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo.

**25.** Lunedì 11/12/2023, 8–10. **ore: 2(50)**

Metodo di Jacobi e Gauss-Seidel: costruzioni e proprietà. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti. Esercizio sul metodo di Gauss-Seidel.

**26.** Martedì 12/12/2023, 17–19. **ore: 2(52)**

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Il problema di Cauchy associato a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Teorema di esistenza e unicità (locale e globale) della soluzione. Esercizio sul metodo di Jacobi.

**27. Mercoledì 13/12/2023, 11–13. ore: 2(54)**

---

Metodi alle differenze finite. Discretizzazione del dominio. Metodo di Eulero esplicito per una equazione differenziale ordinaria. Metodo di Eulero esplicito per sistemi di ODE. Esercizio.

**28. Lunedì 18/12/2023, 08–10. ore: 2(56)**

---

Metodo di Eulero implicito. Esercizio. Il metodo del punto medio. Metodo di Crank-Nicolson. Metodo di Heun. Metodo di Eulero modificato. Esercizio.

**29. Martedì 19/12/2023, 17–19. ore: 2(58)**

---

Analisi dei metodi monostep. Errore globale di discretizzazione, locale di discretizzazione e di propagazione. Convergenza, consistenza e stabilità di una formula alle differenze finite. Stabilità dei metodi monostep. Verifica della consistenza mediante sviluppo in serie dell'errore locale di discretizzazione. Analisi della convergenza, consistenza e stabilità del metodo di Eulero e del metodo di Heun.

**30. Mercoledì 20/12/2022, 11–13. ore: 2(60)**

---

Formulazione generale dei metodi multistep. Polinomio caratteristico associato ad un metodo multistep. Stabilità. Criterio delle radici. Teorema di Dahlquist. Esercizi.