

REGISTRO DELLE LEZIONI DI  
**Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi**  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AMBIENTALE PER LO  
SVILUPPO SOSTENIBILE  
**Calcolo Numerico**  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA  
6 CFU - A.A. 2023/2024  
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO  
ULTIMO AGGIORNAMENTO: DECEMBER 20, 2023

**1. Lunedì 02/10/2023, 11–13. ore: 2(2)**

---

Introduzione al corso. Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie (ODE) di ordine  $n$ . Omogeneità, linearità. Esempi. Definizione di equazione alle derivate parziali in  $n$  variabili di ordine  $r$ . Omogeneità, linearità. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine per funzioni in due variabili: equazioni ellittiche, paraboliche e iperboliche.

**2. Mercoledì 04/10/2023, 8–10. ore: 2(4)**

---

Esempi di modelli matematici che coinvolgono PDEs di tipo ellittico, parabolico e iperbolico: equazione di Poisson, l'equazione del calore e l'equazione delle onde. Problemi stazionari e problemi evolutivi. Esempi di problemi di tipo Dirichlet e di tipo Neumann. Esempi di problemi di tipo Cauchy-Dirichlet e di tipo Cauchy-Neumann. Richiami sulla risoluzione analitica di ODE: ODE del primo ordine omogenee.

**3. Venerdì 06/10/2023, 9–11. ore: 2(6)**

---

Risoluzione analitica di ODE del primo ordine non omogenea. Problema di Cauchy. Risoluzione di ODE del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee. Esercizio. Risoluzione di ODE del secondo ordine a coefficienti costanti avente come termine noto una funzione esponenziale. Esercizi.

---

**4. Lunedì 9/10/2023, 11–13. ore: 2(8)**

---

Risoluzione di ODE del secondo ordine a coefficienti costanti avente come termine noto un polinomi algebrico e un polinomio trigonometrico. Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Estensione di una funzione per periodicità. Esempi. Armoniche elementari.

---

**5. Lunedì 16/10/2023, 11–13. ore: 2(10)**

---

Richiami sugli spazi di Hilbert. Lo spazio  $L^2([a, b])$ . Polinomio trigonometrico. Ortogonalità e ortonormalità del sistema trigonometrico. Formule di Werner. Integrazione di una funzione periodica su un periodo.

---

**6. Mercoledì 18/10/2023, 8–10. ore: 2(12)**

---

Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Polinomio di migliore approssimazione. Serie di Fourier in forma trigonometrica e in forma armonica. Esercizio sul calcolo della serie di Fourier di una data funzione.

---

**7. Venerdì 20/10/2023, 08–11. ore: 3(15)**

---

Funzioni continue a tratti. Funzione regolare a tratti. Teorema di convergenza della Serie di Fourier. Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Esercizio sulla serie di Fourier. Andamento dei coefficienti all'infinito (Lemma di Riemann-Lebesgue). Integrabilità e derivabilità termine a termine di una serie di Fourier.

---

**8. Lunedì 23/10/2023, 8–10. ore: 2(17)**

---

Esercizio sull'integrabilità della serie. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali. Esercizio.

---

**9. Mercoledì 25/10/2023, 08–10. ore: 2(19)**

---

Il problema di Sturm-Liouville: forma canonica, autovalori e autofunzioni, spettro, proprietà dello spettro, funzione peso, ortogonalità delle autofunzioni. Esercizio sul problema di Sturm-Liouville: determinazione dello spettro.

---

**10. Venerdì 27/10/2023, 08–11. ore: 3(22)**

---

Esercizi sul problema di Sturm-Liouville. Sviluppo in serie di funzioni a quadrato integrabile mediante autofunzioni e calcolo dei relativi coefficienti.

---

**11. Lunedì 6/11/2023, 11–13. ore: 2(24)**

---

Il metodo degli integrali generali. Idea e applicazioni al caso delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine e alle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico. Applicazione all'equazione delle onde con velocità e posizione iniziale non nulla. Esercizio di una prova d'esame.

---

**12. Mercoledì 08/11/2023, 08–10. ore: 2(26)**

---

Il metodo di separazione delle variabili. Applicazioni al caso di equazioni alle derivate parziali del primo ordine e del secondo ordine di tipo ellittico.

---

**13. Venerdì 10/11/2023, 09–11. ore: 2(28)**

---

Il metodo di separazione delle variabili con la tecnica delle funzioni ausiliarie. Applicazione a una PDE non omogenea di tipo parabolico.

---

**14. Venerdì 10/11/2023, 17–19. ore: 2(30)**

---

Esercizi di riepilogo sui metodi analitici per PDE.

---

**15. Lunedì 13/11/2023, 11–13. ore: 2(32)**

---

Richiami su risoluzione numerica di sistemi lineari con matrici dense e matrici sparse, matrici diagonali, triangolari superiori e inferiori, matrici ortogonali. Richiami sul calcolo di autovalori, spettro e raggio spettrale. Matrici simmetriche definite positive e semi-definite positive. Matrici diagonalmente dominanti per righe e/o colonne.

---

**16. Mercoledì 15/11/2023, 08–10. ore: 2(34)**

---

Richiami su Matrici di permutazione. Matrici riducibile e irriducibili. Richiami su norme vettoriali e norme matriciali. Esempi.

---

**17.                                      Lunedì 20/11/2023, 11–13.                                      ore: 2(36)**

---

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Un primo esercizio sul calcolo delle iterate. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo. Il metodo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel.

---

**18.                                      Mercoledì 22/11/2023, 08–10.                                      ore: 2(38)**

---

Proprietà di parallelizzabilità del metodo di Jacobi e Gauss-Seidel. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive, diagonalmente dominanti in senso stretto e diagonalmente dominante e irriducibili. Il caso delle matrici tridiagonali. Esercizi.

---

**19.                                      Venerdì 24/11/2023, 8–11.                                      ore: 3(41)**

---

Introduzione ai metodi alle differenze finite. Metodi alle differenze finite per problemi di Cauchy del primo ordine. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Discretizzazione del dominio. Differenza finita in avanti. Metodo di Eulero esplicito. Esercizio. Differenza finita all'indietro. Metodo di Eulero implicito. Analogie e differenze con il metodo di Eulero esplicito. Esercizio. Differenza finita centrata. Il metodo del punto medio multistep esplicito. La questione dell'inizializzazione dei metodi multistep. Esercizio.

---

**20.                                      Lunedì 27/11/2023, 11–13.                                      ore: 2(43)**

---

Cenni all'errore globale di discretizzazione, consistenza e stabilità di metodi monostep. Differenze finite in avanti del primo e secondo ordine. Metodi alle differenze finite per una ODE del secondo ordine con valori agli estremi: schema numerico di discretizzazione mediante approssimazione delle derivate con differenze finite centrali.

---

**21. Venerdì 1/12/2023, 8–11. ore: 3(46)**

---

Analisi della matrice dei coefficienti del sistema lineare relativo al metodo alle differenze finite per il problema ai limiti. Scelta del passo di discretizzazione per garantire l'invertibilità del sistema e la convergenza dei metodi iterativi di Gauss-Seidel e Jacobi. Errore teorico dell'errore per lo schema di discretizzazione di una ODE con valori agli estremi. Il teorema di Gershgorin. Esercizio su come costruire un esempio con soluzione esatta assegnata. Prova d'esame. Introduzione allo schema numerico alle differenze finite per PDE ellittiche.

---

**22. Lunedì 4/12/2023, 11–13. ore: 2(48)**

---

Schema alle differenze finite centrali per PDE ellittiche (schema a 5 punti). Sistema lineare pentadiagonale.

---

**23. Mercoledì 6/12/2023, 08–10. ore: 2(50)**

---

Analisi del sistema pentadiagonale derivante dallo schema a 5 punti per PDE ellittiche. Analisi teorica dell'errore. Esercizio su metodi alle differenze finite per PDE ellittiche.

---

**24. Lunedì 11/12/2023, 11–13. ore: 2(52)**

---

Metodi alle differenze finite per PDE paraboliche. Discretizzazione della derivata in tempo con differenza finita all'indietro. Schema di discretizzazione a 4 punti. Analisi della matrice dei coefficienti del risultante sistema lineare. Analisi dell'errore dello schema di discretizzazione a 4 punti.

---

**25. Mercoledì 13/12/2023, 08–10. ore: 2(54)**

---

Prova d'esame sul caso parabolico. Metodi alle differenze finite per PDE iperboliche. Problemi relativi a un eventuale schema a 5 punti. Approssimazione della soluzione ai primi due istanti temporali.

---

**26.** **Venerdì 15/12/2023, 9–11.** **ore: 2(56)**

---

Metodi delle differenze finite a sette punti per PDE iperboliche. Analisi della matrice del sistema lineare a cui si perviene. Esercizio sullo schema numerico sviluppato.

---

**27.** **Lunedì 18/12/2023, 11–13.** **ore: 2(58)**

---

Approssimazione di una funzione: errore di migliore approssimazione e polinomio di migliore approssimazione. Il teorema di Weierstrass. Il polinomio di Taylor. Esempi e svantaggi. Polinomio interpolante: esistenza e unicità. Il polinomio di Lagrange. Stima teorica dell'errore.

---

**28.** **Mercoledì 20/12/2023, 08–10.** **ore: 2(60)**

---

Applicazione alle PDEs paraboliche: calcolo del polinomio interpolante di Lagrange per la scelta del vettore iniziale nei metodi iterativi. Esercizi su metodi iterativi e metodo alle differenze finite per PDEs iperboliche.