Calcolo Numerico: metodi, modelli e algoritmi

Metodi alle differenze finite per equazioni iperboliche

Docente: Luisa Fermo
fermo@unica.it

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari

Problema differenziale

Sia

$$\Omega = \{(x,t) \quad t.c. \quad a \le x \le b, \qquad t \ge 0\},$$

e si consideri il seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + p(x,t)u_x + q(x,t)u_t + r(x,t)u + s(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \\ u(a,t) = f(t), \quad t \ge 0 \\ u(b,t) = g(t), \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [a,b] \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [a,b] \end{cases}$$

dove p, q, r, s, f, g, ϕ e ϕ sono funzioni assegnate e $u(x,t)$ è la funzione incognita.

Schema di discretizzazione a 5 punti

Discretizziamo il dominio introducendo i nodi

$$\begin{cases} x_0 = a; \\ x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, \dots, n \quad h = x_{i+1} - x_i \\ x_{n+1} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_j = jk, \quad j = 1, 2, \dots, \qquad k = t_{j+1} - t_j \end{cases}$$

e approssimiamo le derivate con delle differenze finite centrate

$$u_t(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \qquad u_{tt}(x_i, t_j) \quad \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

$$u_x(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \qquad u_{xx}(x_i, t_j) \quad \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Lo schema numerico è

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + p(x_i, t_j)\dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\
\qquad\qquad\qquad + q(x_i, t_j)\dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + r(x_i, t_j)u_{i,j} + s(x_i, t_j), \\
\\
u_{0,j} = f(t_j), \qquad u_{n+1,j} = g(t_j), \\
\\
u_{i,0} = \phi(x_i), \qquad u_t(x_i, t_0) = \psi(x_i)
\end{cases}
$$

Risoluzione

- **Soluzione all'istante** t_0

$$u(x_i, t_0) = u(x_i, 0) = \phi(x_i),$$

- **Soluzione all'istante** t_1. Utilizzando la traccia del problema differenziale

$$\begin{aligned}
&u(x_i, t_1) = u(x_i, k) \\
&= u(x_i, 0) + k u_t(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k^3) \\
&= \phi(x_i) + k\psi(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} [u_{xx}(x_i, 0) + p(x_i, 0) u_x(x_i, 0) \\
&\qquad + q(x_i, 0)\psi(x_i) + r(x_i, 0)\phi(x_i) + s(x_i, 0)] \\
&\qquad + \mathcal{O}(k^3).
\end{aligned}$$

A questo punto si approssimano le derivate in x come indicato nella slide precedente.

- **Soluzione all'istante** t_2. Dallo schema numerico si ha una espressione esplicita della soluzione a tale istante. Infatti, ponendo $j = 1$, si ricava

$$
\begin{aligned}
u_{i,2} = 2u_{i,1} - u_{i,0} + k^2 \Bigg[& \frac{u_{i+1,1} - 2u_{i,1} + u_{i-1,1}}{h^2} \\
& + p(x_i, t_1)\frac{u_{i+1,1} - u_{i-1,1}}{2h} + q(x_i, t_1)\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{2k} \\
& + r(x_i, t_1)u_{i,1} + s(x_i, t_1)\Bigg], \quad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

  Osserviamo che se $i = 1$ e $i = n$, si usano le due condizioni al contorno all'istante precedente t_1.
  In questa fase, si sta calcolando la soluzione all'istante t_2 ma non si sta sfruttando l'informazione ai bordi in t_2.

- **Soluzione all'istante t_j con $j > 2$.** Si usa lo schema numerico

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + k^2 \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right.$$
$$+ p(x_i, t_j) \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + q(x_i, t_j) \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{2k}$$
$$\left. + r(x_i, t_j) u_{i,j} + s(x_i, t_j) \right]$$

  Osserviamo nuovamente che se $i = 1$ e $i = n$, si usano le due condizioni al contorno all'istante precedente t_j.
  Non si tiene conto delle condizioni al bordo all'istante $j + 1$ in cui si sta calcolando la soluzione. Al bordo la soluzione può assumere qualsiasi valore all'istante t_{j+1}.