

Tutorato Matematica Applicata

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Marco Ratto

Anno Accademico: 2022-2023

Esercitazione 3A (3 Novembre 2022)

1. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine e se è integrabile termine a termine.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{1}{2}, \\ \sin(\pi x) & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$y_1(x) + y_1'(x) = f(x), \quad y_2''(x) + \sqrt{2}y_2'(x) + y_2(x) = f(x).$$

Soluzione: I coefficienti di Fourier della $f(x)$ sono

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_k = 0, \quad \tilde{b}_k = \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) \cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Le soluzioni delle equazioni differenziali sono:

$$y_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4k^2} \tilde{b}_k [2k \cos(2kx) + \sin(2kx)],$$

$$y_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 16k^4} \tilde{b}_k [2\sqrt{2}k \cos(2kx) + (1 - 4k^2) \sin(2kx)].$$