

TUTORATO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO

TUTOR: DOTT.SSA PATRICIA DÍAZ DE ALBA

Esercitazione del 12/12/2019

Metodi iterativi e ODE

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{\alpha}{3} x_3 = 4 \\ \alpha x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\alpha}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si stabilisca per quali valori di $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ e $\alpha = 1/6$ il metodo di Jacobi converge. Per $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione:

La matrice A dei coefficienti è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Il metodo di Jacobi converge per $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$.

$$x^{(1)} = [4, 3, 2/3]^T, \quad x^{(2)} = [34/9, 25/9, -4/3]^T.$$

Esercizio 2 Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali valori il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente.

Fissato $a = 2$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

Soluzione:

Il sistema ammette una sola soluzione per $\alpha \neq \pm\sqrt{7}$.

Il metodo di Gauss-Seidel converge per $-\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$.

$$x^{(1)} = [-1, 3/4, -3/8]^T, \quad x^{(2)} = [-3/4, 23/32, -23/64]^T.$$

Esercizio 3 Commentare l'esistenza e l'unicità della soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10] \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = \frac{3}{2}$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione:

Il problema ammette una soluzione locale.

$$\eta_1 = 3/2, \quad \eta_2 = 11/8, \quad \eta_3 = 183/128.$$

Esercizio 4 Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y + 1)x - y', \quad x \in [\frac{1}{4}, 5] \\ y(\frac{1}{4}) = 0, \quad y'(\frac{1}{4}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{4}$.

Soluzione:

$$\eta_1 = [1/4, 13/16]^T, \eta_2 = [29/64, 49/64]^T.$$

Esercizio 5 Calcolare in $x = 2$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3xy, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

con il metodo del punto medio con passo $h = \frac{1}{2}$ avvalendosi del metodo di Eulero per l'inizializzazione del metodo.

Soluzione:

$$\eta_1 = 5, \eta_2 = 49/2.$$