TUTORATO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2018/2019

DOCENTE: DOTT.SSA LUISA FERMO
TUTOR: DOTT.SSA PATRICIA DÍAZ DE ALBA

Esercitazione del 12/10/2018
Algebra lineare

Esercizio 1 Si calcolino le norme 1, 2 e ∞ dei seguenti vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e si dica se sono normalizzati rispetto a una determinata norma. Normalizzare il vettore $w_1 + v_1$, dove $v_1 = [i, 2i, 0, 3]^T$, rispetto alla norma 2. Si ortonormalizzino, inoltre, i vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt e si consideri la matrice dei nuovi vettori ortonormali $A = [q_1, q_2, q_3, q_4]$. Si dica se A invertibile. Sfruttando poi i calcoli fatti, e motivando la risposta, si dica se la matrice $B = [q_2, q_1, q_3, q_4]$ invertibile.

Soluzione: $\|w_1\|_1 = 4$, $\|w_1\|_2 = 2$, $\|w_1\|_\infty = 1$.
$\|w_2\|_1 = 2$, $\|w_2\|_2 = \sqrt{2}$, $\|w_2\|_\infty = 1$.
$\|w_3\|_1 = 2$, $\|w_3\|_2 = \sqrt{2}$, $\|w_3\|_\infty = 1$.
$\|w_4\|_1 = 3$, $\|w_4\|_2 = \sqrt{3}$, $\|w_4\|_\infty = 1$.
w_1, w_2 *e* w_3 *sono normalizzati rispetto alla norma* ∞.
$w_1 + v_1$ *normalizzato* : $\frac{1}{\sqrt{24}}[1+i, 1+2i, 1, 4]^T$.
Gram-Schmidt : $q_1 = [1/2, 1/2, 1/2, 1/2]^T$, $q_2 = [-1/2, 1/2, 1/2, -1/2]^T$, $q_3 = [-1/2, -1/2, 1/2, 1/2]^T$, $q_4 = [-1/2, 1/2, -1/2, 1/2]^T$.
A *e* B *sono invertibili.*

Esercizio 2 [tratto dalla prima prova intermedia di Matematica Applicata del 14/11/2017, compito numero 1] Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove β e α sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

Soluzione: B è l'inversa di A per $\beta = 1/2$.
C è non singolare per $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
D è ortogonale per $\alpha = -1$.
$\sigma(D) = \{1, 1, -1\}$, $\rho(D) = 1$.
$\sigma(D^{-1}) = \{1, 1, -1\}$, $\rho(D^{-1}) = 1$.

Esercizio 3 Assegnate le matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca se Q è ortogonale e si determini il parametro α che rende S la matrice inversa di R. Si fissi il valore trovato. Si calcoli la matrice $A = QR$. Si dica se A invertibile, si calcolino $\det(R), \det(R^2), \det(5R), \det(R^{-1})$, e si determini, nel modo pi conveniente e motivando la risposta, l'inversa di A.

Soluzione: B è ortogonale.
S è l'inversa di R per $\alpha = 1/3$.
$A = QR$ *é invertibile.*
$\det(R) = -3$, $\det(R^2) = 9$, $\det(5R) = -375$, $\det(R) = -1/3$.
$A^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = SQ^T$.