Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2018/2019

docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 14/12/2018
Metodi iterativi e equazioni differenziali

Esercizio 1 [tratto dalla prova del 27/06/2018] Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dopo avere determinato i valori del parametro α che rendono la matrice definita positiva, si studi la convergenza del metodo di Gauss Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

Soluzione:
A è definita positiva per $\alpha > 1$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha > 1$ oppure se $\alpha < -1$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $x^{(1)} = [2, 1/2, 1/2]^T$ e $x^{(2)} = [2, 3/4, 1/4]^T$.

Esercizio 2 [tratto dalla prova del 12/06/2018] Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.

Soluzione:
A è non singolare se $\alpha \neq 0, 3/2$. Il metodo di Jacobi converge se $3/2 <$

$\alpha < 3/2$. *Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono* $x^{(1)} = [8, 4/3, 8/3]^T$ *e* $x^{(2)} = [20/3, 8/9, 28/9]^T$.

Esercizio 3 [tratto dalla prova del 12/06/2018] Commentare l'esistenza e l'unicità della soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10]. \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = 3/2$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = 1/2$.

Soluzione:
Il problema ammette un'unica soluzione locale, in quanto la $f(x, y)$ *è localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile;* $\eta_1 = \frac{3}{2}, \eta_2 = \frac{11}{8}, \eta_3 = \frac{183}{128}$.

Esercizio 4 [tratto dalla prova del 25/10/2018] Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 2xy, \quad x \in [1, 3] \\ y(1) = 2, y'(1) = 1. \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione:
$\eta_1 = [5/2, 3]^T, \eta_2 = [4, 27/4]^T$.