Tutorato delle lezioni di

MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

docente: Dott.ssa Luisa Fermo

tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 14/11/2019

Convoluzione ed equazioni differenziali tramite Trasformate di Fourier

Esercizio 1 Sviluppare in forma complessa la seguente funzione in serie di Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-3,-2] \\ 0, & x \in [-2,3]. \end{cases}$$

A partire da quella ricavata dedurre quella in forma trigonometrica.

Soluzione:

$$c_0 = -\frac{5}{6}$$

$$c_k = \frac{3}{k^2\pi^2}\cos\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)+\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)-\frac{3}{k^2\pi^2}(-1)^k+i\left[\frac{3}{k^2\pi^2}\sin\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)+\frac{3}{k\pi}(-1)^k\right]$$

$$c_{-k} = \frac{3}{k^2\pi^2}\cos\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)+\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)-\frac{3}{k^2\pi^2}(-1)^k-i\left[\frac{3}{k^2\pi^2}\sin\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\tfrac{2\pi}{3}\right)+\frac{3}{k\pi}(-1)^k\right]$$

$$a_0 = c_0 = -\frac{5}{6}$$

$$a_k = 2\left[\frac{3}{k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{3}{k^2\pi^2}(-1)^k\right]$$

$$b_k = -2\left[\frac{3}{k^2\pi^2}\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{3}{k\pi}(-1)^k\right]$$

Esercizio 2 Effettuare i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2+ik)(1+\frac{1}{5}ik)}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{3x^2+3}\right)*\left(e^{-2x}H(x-2)\right)\right\}.$$

Soluzione:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2+ik)(1+\frac{1}{5}ik)}\right\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \\ -\dfrac{5}{3}e^{-2x}[e^{-3x}-1], & x > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{3x^2+3}\right) * \left(e^{-2x}H(x-2)\right)\right\} = \frac{\pi}{3}\frac{e^{-4-2ik-|k|}}{2+ik}$$

Esercizio 3 Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $(-\infty, \infty)$

$$y'' + 6y' + 5y = \delta(x-3).$$

Soluzione:

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \\ \dfrac{1}{4}[e^{-(x-3)} - e^{-5(x-3)}], & x > 3 \end{cases}$$

Esercizio 4 Risolvere ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$3y'' - 4y = H(x+1) - H(x-4).$$

Soluzione:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{8}e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x}[e^{-\frac{8}{\sqrt{3}}} - e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}], & x < -1 \\ \\ -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}[e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)} + e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x-4)}], & x \in [-1, 4] \\ \\ -\dfrac{1}{8}e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}x}[e^{\frac{8}{\sqrt{3}}} - e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}], & x > 4 \end{cases}$$