Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

Docente: Prof.ssa Luisa Fermo

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione del 18/12/2019

Metodi alle differenze finite, formule monostep e multistep

1) (Prova scritta 13 febbraio 2019) Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si studi stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{3h}{4}\left[f(x_k,\eta_k) + \frac{1}{3}f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k,\eta_k)\right)\right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - x, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.

SOLUZIONE:

Lo schema è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile. Risulta essere consistente, e quindi convergente, del primo ordine. Le prime due iterate del metodo sono $\eta_1 = \frac{17}{8}$ e $\eta_2 = \frac{205}{48}$.

2) (Prova scritta 18 settembre 2019) Discutere la convergenza della seguente formula alle differenze finite al variare dei parametri reali α e β

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left[\alpha f(x_i,\eta_i) + f(x_i + \frac{\beta}{3}h, \eta_i + \frac{\beta}{3}hf(x_i,\eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

Dire inoltre se la seguente formula multistep è stabile

$$\eta_i = -\eta_{i-2} + 4hf(x_{i-1},\eta_{i-1}).$$

SOLUZIONE:

La formula monostep è stabile per ogni valore dei parametri α e β. È convergente del primo ordine $\forall \beta \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$ e $\alpha = 3$. È convergente del secondo ordine se $\alpha = 3$ e $\beta = 6$. La formula multistep è stabile.

3) (Seconda prova intermedia 10 gennaio 2018) Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{h}{\alpha - 3}\left[f(x_k,\eta_k) + 2f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta hf(x_k,\eta_k))\right]$

(b) $\eta_{k+1} = (\gamma+1)\eta_k - \gamma\eta_{k-1} + 2h(\gamma+1)f(x_k, \eta_k)$

Si determinino i valori dei parametri α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.
SOLUZIONE:
Lo schema (a) è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 6$ e $\beta = \frac{3}{8}$.
Lo schema (b) è multistep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la conoscenza di η_k e di η_{k-1}), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), ad uno stadio (perché ad ogni passo f è valutata una volta) ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 1$.

4) (Recupero seconda prova intermedia 29 gennaio 2019) Si classifichi e si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza del seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{5}{4}h, \eta_k + \frac{5}{4}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Si classifichi e si studi, inoltre, al variare del parametro reale δ la stabilità del seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta+1)\eta_k - \frac{\delta}{4}\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$$

SOLUZIONE:
Il primo schema è di tipo monostep, esplicito, a due stadi ed è stabile, consistente del secondo ordine e quindi convergente del secondo ordine. Il secondo schema è di tipo multistep, esplicito, a uno stadio ed è stabile per $-2 \leq \delta \leq 2$.

5) (Prova scritta 23 febbraio 2018) Considerato il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{y_2}{x}, \\ y_1(2) = 0, \quad y_2(2) = 1, \quad x \in [2, 5] \end{cases}$$

si approssimi la soluzione in $x = 3$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.
SOLUZIONE:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [-\frac{3}{2}, -\frac{7}{20}]^T$.