Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2019/2020
docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 21/10/2019
Serie di Fourier

Esercizio 1 Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < -1/2, \\ \sin(\pi x), & -1/2 \le x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$S_f(x) = \frac{\pi + 4}{2\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\frac{1}{1-k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - (-1)^k \right] \sin(k\pi x)$$

Esercizio 2 Risolverre, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-5, 5]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y' + \sqrt{3} y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{5}x, & -5 \le x < 0, \\ 2 - \frac{3}{5}x, & 0 \le x < 5 \end{cases}$$

Soluzione:

$$S_y(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{150\sqrt{3}[(-1)^{k+1}+1]}{k^2\pi^2(k^2\pi^2+75)} \cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) + \frac{30[(-1)^{k+1}+1]}{k\pi(k^2\pi^2+75)} \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$$

La funzione f è differenziabile termine a termine.

Esercizio 3 Risolvere, facendo ricorso alle serie di Fourier, la seguente equazione differenziale e dire se $f(x)$ è integrabile termine a termine

$$4y'' + y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1, \\ -x, & -1 \le x < 1, \\ -1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Soluzione:

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi(1-k^2\pi^2)} \left[(-1)^k - \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$$

La funzione f è integrabile termine a termine.

Esercizio 4 Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-3,-2], \\ 0, & x \in [-2,3] \end{cases}$$

Soluzione:

$$S_f(x) = -\frac{5}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{6}{k^2\pi^2} \left[(-1)^k - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right] \right] \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) +$$
$$\left[\frac{4}{k\pi} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{6}{k\pi}(-1)^k - \frac{6}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$