Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2018/2019

docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 23/11/2018
Algebra lineare

Esercizio 1 Si considerino le seguenti matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α e β che rendono M e U una l'inversa dell'altra e che rendono simmetrica la matrice A = LM. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A, il suo raggio spettrale e le norme 1, 2 e ∞.

Soluzione:
Le matrici M e U sono una l'inversa dell'altra se $\beta = -\frac{1}{8}$.
A è simmetrica se $\alpha = 1$.

$$A^{-1} = M^{-1}L^{-1} = UU^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$\rho(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{2}$.
$\|A\|_1 = 20, \|A\|_\infty = 20, \|A\|_2 = \frac{21+\sqrt{185}}{2}$.

Esercizio 2 Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale.

Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli le norme 1, 2 e ∞ delle tre matrici e si precisi il raggio spettrale di A.

Soluzione:
Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ *e* $\beta = -5/2$.
C è ortogonale se $\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\|A\|_1 = 3, \|A\|_\infty = 3, \|A\|_2 = \sqrt{5}$.
$\|B\|_1 = 3/5, \|B\|_\infty = 3/5, \|B\|_2 = \sqrt{5}$.
$\|C\|_1 = 2/\sqrt{2}, \|C\|_\infty = 2/\sqrt{2}, \|C\|_2 = 1$.
$\rho(A) = \sqrt{5}$.

Esercizio 3 Si considerino le matrici

$$A = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \quad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B l'inversa di A e si calcolino le norme ∞, 1 e 2 della matrice A. Si dica, inoltre, se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di β che rendono C una matrice ortogonale.

Soluzione:
B è l'inversa di A se $\alpha = 2$.
$\|A\|_1 = 5, \|A\|_\infty = 5, \|A\|_2 = 5$.
A non è definita positiva.
C è ortogonale se $\beta = \pm\sqrt{3}$.

Esercizio 4 Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ik}{k^2+2k+6}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{e^{2ix}\cos 3x}{1+3ix}\right\}.$$

Soluzione:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ik}{k^2+2k+6}\right\} = \frac{1}{2}e^{-ix}\left[-e^{-\sqrt{5}x}H(x) + e^{\sqrt{5}x}H(-x)\right] - \frac{1}{2\sqrt{5}}ie^{-\sqrt{5}|x|}.$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{2ix}\cos 3x}{1+3ix}\right\} = \frac{\pi}{3}\left[e^{-\frac{1}{3}(-k+5)}H(-k+5) + e^{-\frac{1}{3}(-k-1)}H(-k-1)\right].$$