TUTORATO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2018/2019
DOCENTE: DOTT.SSA LUISA FERMO
TUTOR: DOTT.SSA PATRICIA DÍAZ DE ALBA

Esercitazione del 26/10/2018
Equazioni differenziali e Serie di Fourier

Esercizio 1 [Tratto dalla prova parziale del 14/11/2017 - Compito 1]
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + \sqrt{2}y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1 \\ 2 + x, & -1 \leq x < 0, \\ 2 - x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Soluzione:
$$S_y(x) = \frac{5\sqrt{2}}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{16\sqrt{2}}{k^2\pi^2(k^2\pi^2+8)}\left(-\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+1\right)\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) +$$
$$\left[\frac{8}{k\pi(k^2\pi^2+8)}\left(-\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+1\right)\right]\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

f è derivabile termine a termine.

Esercizio 2 [Tratto dalla prova parziale del 14/11/2017 - Compito 2]
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + \sqrt{5}y(x) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ x, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Soluzione:
$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{k^2\pi^2+5}\left(2(-1)^{k+1} + \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\cos(k\pi x)+$$

$$\left[\frac{\sqrt{5}}{k\pi(k^2\pi^2+5)}\left(2(-1)^{k+1}+\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]\sin(k\pi x).$$

f non è derivabile termine a termine.

Esercizio 3 [Tratto dalla prova parziale del 13/07/2018] Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1,1]$

$$2y''(x)+y(x)=|x|.$$

Soluzione:

$$S_y(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{k^2\pi^2(-2k^2\pi^2+1)}\left((-1)^k+1\right)\right]\cos(k\pi x).$$

Esercizio 4 [Tratto dalla prova parziale del 12/06/2018] Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1,1]$

$$2y''(x)+y(x)=2x+1.$$

Soluzione:

$$S_y(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{4(-1)^k}{k\pi(-2k^2\pi^2+1)}\right]\sin(k\pi x)$$