Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2018/2019

docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 30/11/2018
Algebra lineare

Esercizio 1 [tratto dal recupero della seconda prova intermedia del 29/01/2016] Si calcoli per quali valori del parametro $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

è ortogonale e fissato uno di questi valori si determini il raggio spettrale. Sia ora $\theta = \pi$. Si determini il condizionamento in norma 2 di A e si calcoli nel modo più conveniente possibile la soluzione del sistema $A^2x = b$ con $b = [1, -2, 0]^T$.

Soluzione:
A è ortogonale $\forall\theta \in \mathbb{R}$.
$\rho(A) = 1$ per $\theta = 0$.
$K_2(A) = 1$.
$x = (A^T)^2 b$.

Esercizio 2 [tratto dalla seconda prova intermedia del 14/01/2016] Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β B è la matrice inversa di A. Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞.

Soluzione:
A è invertibile per $\alpha \neq 0$ ed è definita positiva per $\alpha > 0$.
B è la matrice inversa di A per $\beta = \frac{1}{5}$.

$$K_1(A) = \begin{cases} \dfrac{4}{|\alpha|}, & -\dfrac{5}{4} \leq \alpha \leq \dfrac{5}{4} \\[2ex] \dfrac{16}{5}, & -4 < \alpha < -\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4} < \alpha < 4 \\[2ex] \dfrac{4|\alpha|}{5}, & \alpha < -4, \alpha > 4. \end{cases}$$

$K_1(A) = K_\infty(A)$.

$$K_2(A) = \begin{cases} \dfrac{5+\sqrt{5}}{2|\alpha|}, & -\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \leq \alpha \leq \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \\[2ex] \dfrac{(\sqrt{5}+1)(5+\sqrt{5})}{4\sqrt{5}}, & \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} < \alpha < -\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}, \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} < \alpha < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{(\sqrt{5}+1)|\alpha|}{2\sqrt{5}}, & \alpha < \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}, \alpha > \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 3 Risolvere con il metodo di Gauss il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases} .$$

Soluzione:
$x = [63/29, 43/29, 2/29, 28/29]^T$.

Esercizio 4 Eseguire la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utilizzare i fattori ottenuti per calcolare il determinante della matrice A e risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con $b = [10, 2, 7]^T$.

Soluzione:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\det(A) = 27.$

$x = [1, 2, 3]^T.$