

TUTORATO DELLE LEZIONI DI  
**MATEMATICA APPLICATA**

A.A. 2018/2019

DOCENTE: DOTT.SSA LUISA FERMO

TUTOR: DOTT.SSA PATRICIA DÍAZ DE ALBA

*Esercitazione del 07/12/2018*

*Fattorizzazioni  $A=LU$  e  $PA=LU$ , e metodi iterativi*

**Esercizio 1** Eseguire la fattorizzazione  $LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utilizzare i fattori ottenuti per calcolare il determinante della matrice  $A$  e risolvere il sistema lineare  $Ax = b$  con  $b = [10, 2, 7]^T$ . **Calcolare, inoltre, usando la fattorizzazione, l'inversa di  $A$ .**

*Soluzione:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -5/27 & 1/27 \\ 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 2 [tratto dalla prova del 25/10/2018]** Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

e la si usi per calcolare il determinante di  $A$  e la terza colonna della sua inversa.

*Soluzione:*

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = -80.$$

$$x_3 = [-1/10, 1/5, -3/10, 2/5]^T.$$

**Esercizio 3 [tratto dalla prova del 23/02/2018]** Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di  $A$  e la soluzione del sistema  $Ax = b$  con  $b = [-5, 2, -2, 4]^T$ .

*Soluzione:*

$$U = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10/3 & 25/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -11/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 81/11 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/10 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1/10 & -3/11 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = -810.$$

$$x = [1, -1, 1, -1]^T.$$

**Esercizio 4 [tratto dalla prova del 25/10/2018]** Si consideri il sistema  $Ax = b$ , dove

$$A = \begin{bmatrix} -3a & a & 0 \\ a & a & 2a \\ 0 & a & 2a \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro  $a$  la matrice  $A$  è invertibile. Si studi al variare del parametro  $a$  la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto  $a = 1$ , si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da  $x^{(0)} = [1, 1, 0]^T$ .

*Soluzione:*

La matrice  $A$  è invertibile per  $a \neq 0$ .

*Il metodo di Jacobi converge per  $a \neq 0$ .  
 $x^{(1)} = [0, 0, 0]^T$  e  $x^{(2)} = [-1/3, 1, 1/2]^T$ .*