Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2018/2019

docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 07/10/2016
Algebra lineare

1. A partire dai seguenti vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si crei mediante il procedimento di Gram-Schmidt una base di vettori ortonormali $B = [q_1, q_2, q_3]$. Si consideri poi la matrice $A = [q_1, q_2, q_3]$, si dica se questa ortogonale e si indichi la sua inversa.

Soluzione:
Gram-Schmidt : $q_1 = [1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10}]^T$, $q_2 = [3/\sqrt{35}, -5/\sqrt{35}, -1/\sqrt{35},]^T$, $q_3 = [12/\sqrt{224}, 8/\sqrt{224}, -4/\sqrt{224}]^T$.
A è ortogonale poichè le sue colonne sono ortogonali tra loro.
$A^{-1} = A^T$.

2. Si consideri il vettore $w = (1, \beta, 0)^T$ dipendente dal parametro reale β. Costruita la matrice, $A = I - 2ww^T$ si dica per quali valori di β la matrice singolare e per quali valori le sue tre colonne sono ortogonali. Fissato il valore $\beta = 2$ si calcoli la norma con indice 1, 2 e ∞ delle tre colonne e si determini lo spettro della matrice.

Soluzione: A non è singolare per nessun valore di β.
Le colonne di A sono ortogonali per $\beta = 2$.
$\|w_1\|_1 = 5$, $\|w_1\|_2 = \sqrt{17}$, $\|w_1\|_\infty = 4$.
$\|w_2\|_1 = 11$, $\|w_2\|_2 = \sqrt{65}$, $\|w_2\|_\infty = 7$.

$\|w_3\|_1 = 1,\ \|w_3\|_2 = 1,\ \|w_3\|_\infty = 1.$
$\sigma(A) = \{0, 1, -9\}.$

3. Assegnate le matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca se Q ortogonale e si determini il parametro α che rende S la matrice inversa di R. Si fissi il valore trovato. Si calcoli la matrice $A = QR$. Si dica se A invertibile, si calcolino i suoi autovalori (sapendo che uno di essi pari a 1) e si determini, nel modo pi conveniente e motivando la risposta, linversa di A.

Soluzione: Q è ortogonale.
S è l'inversa di R per $\alpha = 1/3$.
A è invertibile.
$\sigma(A) = \{1, -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{104}}{6} i\}.$
$A^{-1} = SQ^T.$

4. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Si calcoli, inoltre, per quali valori del parametro $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice ortogonale e per quali invertibile.

Soluzione: A è ortogonale per $\forall\theta \in \mathbb{R}$.
A è invertibile per $\forall\theta \in \mathbb{R}$.