Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2018/2019
docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 08/01/2019

Esercizio 1 [tratto dalla prova del 18/01/2018] Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{h}{(\alpha-3)}[f(x_k,\eta_k) + 2f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k,\eta_k))]$,

b) $\eta_{k+1} = (\gamma+1)\eta_k - \gamma\eta_{k-1} + 2h(\gamma+1)f(x_k,\eta_k)$.

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

Soluzione:
Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 3$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 6$ e $\beta = 3/8$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $-1 < \gamma < 1$.

Esercizio 2 [tratto dalla prova del 18/01/2018] Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', \quad x \in \left[\frac{2}{3}, 5\right] \\ y\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad y'\left(\frac{2}{3}\right) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.

Soluzione:
$\eta_1 = (-1, -\frac{2}{3})^T$, $\eta_2 = (-\frac{11}{9}, -\frac{13}{9})^T$.

Esercizio 3 [tratto dalla prova del 27/10/2017] Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \gamma & 0 \\ \gamma & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

dire per quali valori del parametro reale γ A è invertibile, e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $Ax = b$. Assegnato $\gamma = 2$, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire dal vettore iniziale $x(0) = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione:
Invertibile $\forall\gamma \neq \pm\sqrt{24}$, *Jacobi converge per* $-\sqrt{24} < \gamma < \sqrt{24}$.
Iterazioni di Jacobi: $x(1) = [1/5, 7/25, 7/125]^T$, $x(2) = [11/125, 110/625, -50/625]^T$.

Esercizio 4 [tratto dalla prova del 27/10/2017] Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e risolvere il sistema $Ax = b$, con $b = [0, -12, -6, -12]^T$.

Soluzione:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 12$, $x = [1, 0, -7, -6]^T$.

Esercizio 5 [tratto dalla prova del 27/10/2017] Risolvere, facendo ricorso alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y'' - 4y = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right), \quad x \in [-2, 2]$$

Soluzione:

$$S_y(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-24\sqrt{3}(-1)^k}{(16+3k^2\pi^2)(4-9k^2)\pi} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

Esercizio 6 [tratto dalla prova del 27/10/2017] Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+2k+8}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{e^{-2ix}}{2x^2+1}\right\}$$

Soluzione:

$f(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{14} e^{-ix-\sqrt{7}|x|}$, $F(k) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|k-2|}$