Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

docente: Prof.ssa Luisa Fermo

tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 08/01/2020

Riepilogo

Esercizio 1 Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-7y' + y = H(x+5) - H(x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Soluzione:

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{7}x}[-e^{\frac{1}{7}} + e^{\frac{5}{7}}], & x < -5 \\ e^{\frac{1}{7}x}[-e^{\frac{1}{7}} + e^{-\frac{1}{7}x}], & x \in [-5,-1] \\ 0, & x > -1 \end{cases}$$

Esercizio 2 Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1,1,1]^T$.

Soluzione:

A e B sono una l'inversa dell'altra per $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{5}{2}$.

C è una matrice ortogonale per $\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$K_1(A) = \frac{9}{5} = K_\infty(A), K_2(A) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$K_1(B) = K_1(A), K_\infty(B) = K_\infty(A), K_2(B) = K_2(A)$.

$K_1(C) = 2 = K_\infty(C), K_2(C) = 1.$
$\rho(A) = \sqrt{5}.$
$\mathbf{x} = [-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}]^T.$

Esercizio 3 Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -12 \\ 12x_1 + 18x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 9x_4 = 17 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione:

$$U = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\det(A) = -12^4.$

$\mathbf{x} = [-1, 0, 2, -1]^T.$

Esercizio 4 Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + \alpha x_3 = 1 \\ 2x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione:

La matrice dei coefficienti è non singolare per $\alpha \neq 0, 4$.
Il metodo di Jacobi è convergente per $-4 < \alpha < 4$.

Le prime due iterate di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1/2, 3/4]^T$ *e* $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/8, -1/2, 5/8]^T$.

Esercizio 5 Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y, \quad x \in [-5, 5] \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = \frac{1}{2}$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione:

$\eta_1^{(1)} = 1, \eta_1^{(2)} = 0.$

$\eta_2^{(1)} = 1, \eta_2^{(2)} = -3/2.$

Esercizio 6 Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

a) $\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(\frac{1}{2} - \delta^2\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{3\delta}{2} f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k))\right],$

b) $\eta_{k+1} = \left(2\delta - \frac{5}{4}\right)\eta_k - (\delta - 1)\left(\delta - \frac{1}{4}\right)\eta_{k-1} + 2h(\delta + 1)f(x_k, \eta_k).$

Si determinino i valori di $\delta \in \mathbb{R}$ che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

Soluzione:

I valori di δ *per cui sono stabili entrambi i metodi e garantiscono un ordine di convergenza para a 1 per il metodo monostep sono* $\delta = 1, 1/2$.