<u>Esercitazione 25 novembre 2016</u>
Matematica Applicata
Ingegneria Biomedica

Patricia Díaz de Alba

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix},$$

   dove α e β sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β B è la matrice inversa di A. Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = QR.$$

   Si dimostri che Q è ortogonale e si calcoli il suo numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞. Si dica, motivando la risposta, se R è invertibile e se è definita positiva. Si risolva, nel modo più conveniente, il sistema $Ax = b$ con $b = [1, 1, 1]^T$.

3. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & -\beta/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -\beta/8 & 1/4 \end{bmatrix},$$

   dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice A è invertibile, per quali è definita positiva e per quali valori di β la matrice B è l'inversa di A. Si calcoli, infine, al variare di β l'indice di condizionamento di A con indice 1 e ∞.

4. Si applichi il metodo di eliminazione di Gauss al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

   Si calcoli il determinante della matrice di coefficienti e la prima colonna della sua inversa.